Učiteljski studij Sveučilišta u Rijeci

Metodika matematike II

Nositelj kolegija: dr.sc. Neva Slani, viši predavač

Studij: Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni učiteljski studij; REDOVNI STUDIJ,
Godina i semestar: 4. GODINA, 8. semestar
Broj i oznaka predmeta: 57010
ECTS bodovi: 4
Web-stranica e-učenja na kojoj se nalaze materijali (mijenja se svake godine):
https://moodle.srce.hr/2021-2022/course/view.php?id=102561#section-10

Student će po odslušanom i položenom kolegiju:

- navesti osnovne matematičke sadržaje i ishode učenja te njihov metodički raspored prema tekućim kurikulumskim dokumentima iz matematike;
- metodički oblikovati nastavne situacije prema važećem kurikulu za satove obrade te vježbi;
- rješavati i smišljati različite tipove zadataka u skladu s pojedinom etapom nastave i postavljenim ishodima te primjenjivati matematičke metode u rješavanju zadataka;
- pisati nastavnu pripremu primjenjujući načela u nastavi matematike kao temeljne principe na kojima počiva nastava matematike i razne strategije učenja i poučavanja;
- metodički oblikovati nastavne sadržaje iz matematike prilagođavajući se razlikama u matematičkim sposobnostima djece;
- argumentirano prosuđivati o udžbenicima i analizirati prijedloge obrade nastavnih tema i jedinica.

Plan nastave po tjednima, približno:

1. Metodičko oblikovanje sadržaja matematike – oblik i prostor (geometrija: tijela, likovi, prostor, točke, crte, pravac, dužina, ravnina, rub, likovi, trokut, četverokut, pravokutnik, kvadrat…).
2. Raspored gradiva iz domene Oblik i prostor po razredima. Kritički osvrt na pisanu pripremu (iz domene Oblik i prostor).
3. Pisanje pripreme (geometrija). Analiza pisane pripreme. Kako napraviti satove geometrije zanimljivijima?

4. Brojevi. Skupovi, njihovo formiranje, uspoređivanje. Formiranje skupa prirodnih brojeva. Brojevna crta. Uspoređivanje brojeva. Totalna uređenost skupa prirodnih brojeva.
5. Kako djeca broje? Prirodni brojevi (10-20, 20-100, dalje). Brojevi veći od 100. Brojevni sustav kroz povijest, značajke i značenje pozicijskog dekadskog sustava.
6. Operacije na prirodnim brojevima –- zbrajanje i oduzimanje. Zbrajanje i oduzimanje brojeva do 20 i dalje. Usmeno i pismeno zbrajanje i oduzimanje.
7. Matematički zadatak - Metode rješavanja problema – metoda rješavanja unatrag, metoda uzastopnih približavanja.
8. Strategije poboljšavanja rješavanja tekstualnih problemskih zadataka ; zbrajanje i oduzimanje s prijelazima - Stern blokovi. Računski zadaci (primjer pripreme s nedovoljno dobrim odabirom zadataka), automatizacija računanja.
9. Množenje i dijeljenje. Množenje i dijeljenje do 1000: usmeno i pismeno množenje.
10. Množenje i dijeljenje do 1000: pismeno množenje, usmeno i pismeno dijeljenje. Pisanje pripreme iz domene Brojevi (par).
11. Matematički zadatak – singapurska (aritmetičko-grafička) metoda.
12. Analiza udžbenika. Rad s učenicima s teškoćama u razvoju.
13. Podaci: analiza, grafovi, dijagrami.
14. Priprema: mjerenje (grupni rad).
15. Zadaci -popularizacija matematike i dodatni zadaci. Logički zadaci.

Literatura:

Obavezna:

1. Markovac, J. (2001.) *Metodika početne nastave matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
2. Aktualni udžbenici iz matematike i ostala pomoćna nastavna sredstva za prvi odgojno-obrazovni ciklus.
3. Liebeck, P. (1995.) Kako djeca uče matematiku. Zagreb: Educa.
4. Polya, G. (1984.) Kako ću riješiti matematički zadatak. Zagreb: Školska knjiga.
5. Kurnik, Z. (2010.) Posebne metode rješavanja matematičkih problema. Zagreb: Element.
6. Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta Matematika http://mzos.hr/datoteke/6-Predmetni_kurikulum-Matematika.pdf
7. Nacionalni kurikulum za osnovnoškolski program i obrazovanje https://mzo.hr/sites/default/files/dokumenti/2017/OBRAZOVANJE/NACION-KURIK/nacionalni_kurikulum_za_osnovnoskolski_odgoj_i_obrazovanje.pdf
8. Kurikuli međupredmetnih tema https://mzo.gov.hr/istaknute-teme/odgoj-i-obrazovanje/nacionalni-kurikulum/medjupredmetne-teme/536?trazi=1&=&page=1

Dodatna:

1. Pavleković, M. (2009.) Matematika i nadareni učenici. Zagreb: Element.
2. Polya, G. (1965.) Mathematical Discovery. New York: John Wiley and sons.inc.
3. Časopis: Matematika i škola. Zagreb: Element.
4. Poučak – časopis za metodiku i nastavu matematike. Zagreb: Profil.
5. MATKA - Časopis za mlade matematičare. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo.

6. Cotić,M., Felda,D. Rješavanje realističkih problema kod početne nastave matematike.http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=106014
7. Vlahović-Štetić, V.(1995), Kladim se da možeš... : psihološki aspekti početnog poučavanja matematike. Zagreb : Udruga roditelja Korak po korak.
8. Sharma, M. (2001). Matematika bez suza – kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike. Lekenik : Ostvarenje.
9. Polonijo, M. (2003.) Matematički upitnici. Zagreb: Alfa.
10. Polonijo, M. (1995.) Matematičke razbibrige za nove radoznalce. Zagreb: Element.
11. Kurnik, Z. (2009.) Zabavna matematika u nastavi matematike. Zagreb: Element.
12. Šporer, Z. (1990.) Brbljanje o geometriji. Zagreb: Školska knjiga.
13. Šporer, Z. (1976.) Uh, ta matematika. Zagreb: Školska knjiga.
14. Adler, I. i dr. (1973.) Matematika - od zlatnog reza do nauke o skupovima. Zagreb: Školska knjiga.
15. Nastavni plan i program matematike od 1. do 4. razreda OŠ http://public.mzos.hr/fgs.axd?id=14181
16. NOK http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2685
17. http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/metodika/materijali.php
18. http://mis.element.hr/list/autor/5/zdravko-kurnik

Uvodno o kolegiju

Na kolegiju ćemo se baviti metodičkim oblikovanjem matematičkih sadržaja. Prvenstveno se to odnosi na sadržaje razredne nastave određene kurikulom, kao i sadržaje za dodatnu i dopunsku nastavu.

No, naše promišljanje i matematičko znanje moraju biti puno širi. Ne postoji još jasan kvalifikacijski okvir za zanimanje učitelja i potrebno znanje za kvalitetnu nastavu matematike, no sigurno je da matematičko znanje mora biti šire od onog što se odnosi na sadržaje koji se poučavaju. Dapače, nužno je da učitelj ima širu matematičku sliku kako bi ispravno podučavao (naoko) jednostavnije sadržaje. Primjerice, kako bi pravilno najavio činjenicu da je kvadrat (jedan specifični, simetrični…) pravokutnik, učitelj bi, ukoliko ne želi objašnjavati odnos kvadrata i pravokutnika, trebao izbjeći da se u zadatku u kojem treba prebrojati koliko je pravokutnika pojavljuju i kvadrati.

Slično, kad se uvodi brojevna crta/pravac, trebala bi se uvijek malo nastavljati lijevo od 0, odnosno 1, kako bismo ju kasnije lakše produljili na tu stranu i uveli nove brojeve.

Posebni izazov čini dodatna nastava matematike, kao i obogaćivanje nastave matematike zanimljivijim i zahtjevnijim sadržajima, čime se nažalost nećemo moći u dovoljnoj mjeri baviti, kao ni prepoznavanjem darovitih učenika ili poteškoća pojedinih učenika koje rezultiraju težim usvajanjem gradiva. Projektom u nastavi bavimo se u kolegiju Metodika matematike 3.

Metodičko oblikovanje sadržaja u početnoj nastavi matematike – Oblik i prostor (geometrija)

- grč. geo (zemlja) + metron (mjerenje)
- Geometrijski sadržaji izuzetno su važni element nastave matematike, često zanemareni (u novom kurikulu opet se malo smanjila količina sadržaja domene Oblik i prostor) ili ne baš najbolje obrađeni. Ovo posljednje za početak se odnosi na neintuitivnost u oblikovanju sadržaja, nedovoljnu razigranost i primjenu.
- Većinom se gradivo o oblika i prostora ne obrađuje na početku polugodišta (samo u 1.razredu), već upravo negdje na kraju 1. odnosno 2. polugodišta. Često ga se preskače i veliki je naglasak na aritmetici, a geometrija se kao „lakša" ubrzava i zanemaruje. Za posljedicu to zna imati upravo lošiji emotivni odnos učenika spram geometrije.
- U 1. razredu se dosad uvijek počinjalo s oblikom i prostorom: radi se o našoj neposrednoj okolini koju možemo opisivati, može se zorno i manje zorno prikazati, ponavlja se ono što djeca znaju iz vrtića. Nastava i gradivo su usklađeni s Piagetovom teorijom kognitivnog razvoja i upravo nam ovo gradivo može služiti kao „provjera" – jesu li izašli iz predoperativne faze i ušli u fazu konkretnih operacija. Kao iznimno bitno provjerava se i proširuje vokabular učenika kroz opisivanje pojmova, odnosa i procesa.

Početnim satovima „Oblik i prostor" provjerit ćemo sljedeće (Piaget!):

1. prepoznavanje, imenovanje pojmova (kugla, kvadar...)
2. opisivanje objekata – po svojstvima (zaobljena <-> ravna, nešto možemo kotrljati, nešto ne… sve treba isprobati empirijski!)
3. uočavanje zajedničkih i različitih svojstava objekata (razvrstavanje prema zajedničkom svojstvu: odvajamo prvo sve žute, zatim sve okrugle i drvene..)
4. uspoređivanje objekata (viši-niži, dulji-kraći, veći-manji, bliži-dalji, …); nizanje prema nekom svojstvu (uočite da se kod nizanja koristi svojstvo tranzitivnosti $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$). Općenito je dobro promatrati vrijedi li kod nekih pojava tranzitivnost kao i vrijedi li simetričnost (brat mog brata moj je brat? predak mog pretka moj je predak? sin mog sina moj je sin?)
5. uočavanje konzervacije, invarijantnih svojstava (voda iz čaše u čašu)

U 1. razredu ponavljamo/uvodimo geometrijska tijela te geometrijske likove

- Kugla, valjak, kocka, kvadar, eventualno piramida, stožac…

- djeca ih razlikuju prema svojstvima: trebaju ih kotrljati, gurati, opipavati, opisivati…
- kako razlikuju kocku i kvadar? Sjetite se igre s drvenim kockicama. Radi se o dva različita gradivna elementa. Kocku kad položimo na bilo koju stranu uvijek dobijemo ista svojstva, dok kod kvadra koji nije kocka to nije tako.
- razlikuju obla i uglata tijela.
- dobro je igrati se: dobiju tijelo na opip (u vreći..) pa ga opisuju bez da ga vide, ostali pogađaju, i slično
- bitno je u okolini prepoznavati predmete OBLIKA kugle, oblika kvadra, oblika kocke, oblika valjka,… Jako je važno izražavati se na taj način – nemamo kugle u prostoru, već predmete oblika kugle. Sjetimo se Platona i njegovog pogleda na pojmove, znanosti i matematiku.
- uvodimo pojmove plohe, strane, brida, vrha… Ploha i strana su ono što opipavamo na tijelima bez skokova, oštrina… Brid je oštri (ravni) rub tijela. Vrh je špic na koji se nabodemo. Radi se o matematički zahtjevnim pojmovima za definirati, nemojte pomisliti da bismo ih u višim razredima bolje opisali!

- prijelaz iz tijela u likove:
  - bojenje tijela i OTISKIVANJE na papir: od ravnih ploha dobijemo likove otiskivanjem na ravnu površinu, od oblih naravno ne - razmislite
  - bacanje sjene – poigrajte se sa sjenama! i raznim izvorima svjetla, raznim pozicijama…
  - možete i s tijela „odljepljivati“ plohe, ako prvo tijelima nalijepimo plohe.. Pazite da nikako ne „rastavite tijelo na likove“, a da prethodno imate „tijelo od kartona/papira“. Ako imate nešto toga tipa od papira/kartona, onda se radi o plaštu, ne o tijelu (razlika lopte i kugle!!). Nikako ne možete „tijelo razrezati u likove“.
  - Obla tijela = puštaju trag u gibanju, kakav? (mokri valjak, mokra lopta)
  - djeca imenuju likove na način da prepoznaju oblik. Opet ih pitajte što je oblika kvadrata, što je oblika trokuta… Svakako, ne pokušavate dati definicije likova! Također, ne spominjete stranice i vrhove (2. razred), iako možete… ako su djeca spremna i ima mjesta za to. No onda, opet na razini „ruba“ i „špica“.
- KVADRAT/PRAVOKUTNIK
  - Kvadrat je pravokutnik (poseban, pravilniji...)
  - tražiti oblike po učionici

U 1. razredu također formiramo pojmove:
CRTA – trag olovke koja se giba po papiru, trag krede po ploči
- ravne, zakrivljene, zatvorene, isprekidane...

ZATVORENA CRTA: omeđuje dio ravnine, a to znači da možemo naći dvije točke tako da da bismo došli od jedne do druge moramo prijeći preko crte
- poč. točka ujedno i završna (kad uvedemo točku, ali možemo opisno: završavamo crtati gdje smo počeli)

TOČKA: mjesto dodira (najmanji trag) olovke i papira
- mjesto presjeka dvije (međusobno različite) crte (koje se sijeku)
- najmanji dio ravnine (Euklid)
- Kako označavamo točke? **x** ili **o.** Križić je zgodniji kad koristimo šestar, kružić je inače češći i zgodniji (recimo, kod označavanja vrhova mnogokuta)

- imenujemo ih velikim tiskanim slovima A,B, C, … Red u oznakama je dobar, tako računamo unaprijed na smisao toga što smo imenovali. No, ne treba robovati navikama ni oznakama. Je li moguće drugačije imenovati točku? Naravno. Sjetimo se geografskih karata, npr. Smiju li imenovati (označiti) točku Š? pa, zašto ne. Može samo njima pomutnju napraviti (recimo dužina ŠŽ…), ali nije da se to ne smije.
- Sada je **CRTA** … puno puno točaka u nizu

2. razred:
DUŽINA – možemo ju definirati/uvesti na dva načina
- najkraća spojnica dviju točaka
- omeđena ravna crta (omeđena dvjema točkama, a njih ćemo zvati **KRAJNJE TOČKE**)
- pojam ravnog intuitivno razumijemo… kao što znamo i za pojam najkraćeg, pa i prethodno gradivu mjerenja kojim bi taj pojam detaljnije opisali…
- dobro je na primjerima pokazati da su dvije definicije ekvivalentne! (da je ravna crta koja spaja dvije točke upravo najkraća spojnica odnosno put..)
- uočavamo dužinu u rubu likova – mnogokuta. Nije teško, tako ih crtamo!
- uvodimo pojam **STRANICE**: dužine koje omeđuju lik
- zajedničke točke stranica = **VRHOVI**

3. razred:
- uvode se suptilniji geometrijski pojmovi
RAVNINA- jedan od osnovnih pojmova koji se ne definira (opisujemo ga svojstvima)
- neomeđena ravna ploha
- ploha = površina koju opipamo ravnomjerno bez grubih prijelaza
- ravno = glatko, drugi pravilni likovi mogu kliziti po njoj
- prve aproksimacije ravnine biti će prostori na kojima smještamo likove kojima se bavimo (ploča, bilježnica...). Kako ćemo dobiti ideju o neomeđenosti?

- radimo mentalnu vježbu „Kakva bi mogla biti naša ploča, a da uvijek imamo mjesta za pisanje?” - mogla bi biti preko cijeloga zida, ali ni to nam nije dovoljno. Morala bi se proširiti van, kat niže... -> „jačamo“ apstraktno i geometrijsko mišljenje kod učenika…
- u ravninu ćemo dalje smještati sve što budemo radili na satovima oblika i prostora – tijela se dalje rade tek kasnije, u višim razredima…

PRAVAC – neomeđena ravna crta
- npr. horizont, tragovi aviona, tračnice, crte na cesti (pod uvjetom da je ravna), dalekovodi, plinovodi, laserska svjetla (doduše, bolje opisuju polupravac, odnosno zraku)...
- pravac prikazujemo ravnom crtom. Zapravo omeđenom, konačnom, jer neomeđeno ne možemo nacrtati! (GeoGebra ima zgodan način prikazivanja pravaca). Kako ćemo ih onda razlikovati? Tako što ćemo znati na što mislimo :D A da bismo bili sigurni, često ćemo dužini, iako ne uvijek, isticati krajnje točke.
- pravac možemo uvijek produljiti
- bitne vježbe: „Koja točka pripada ili se ne nalazi na dužini/pravcu/polupravcu...?” To vrijedi i za bilo koji geometrijski objekt, tako provjeravamo razumiju li učenici definiciju. U slučaju pravca, nekad će ga trebati produljiti da daju odgovor.

- odnos dužine i pravca – svaka dužina određuje točno jedan pravac, svaki pravac sadrži jako puno dužina… svaki pravac je, kao i dužina, jednoznačno određen s dvije različite točke…
POLUPRAVAC – ravna crta omeđena samo s jedne strane
- točka koja ga omeđuje s jedne strane = POČETKA TOČKA POLUPRAVCA
- svaki pripada točno jednom pravcu (tj može se produljiti do točno jednog pravca)

Međusobni položaj pravaca (dužina, polupravaca… promatramo pravce nositelje istih)
1. sijeku se
   -> tada imaju zajedničku točku i kažemo da su pravci UKRŠTENI
2. ne sijeku se
   -> tada nemaju zajedničku točku i kažemo da su pravci PARALELNI ili USPOREDNI

- ako imamo 2 međusobno jednaka pravca oni su međusobno paralelni (a imaju beskonačno mnogo zajedničkih točaka). Taj slučaj često ne ističemo u školskoj matematici, ali ga možemo imati na umu.

OKOMITI PRAVCI: pravci koji se sijeku (specijalni slučaj ukrštenih pravaca) i dijele ravninu na 4 međusobno sukladna djela.
- osim konstrukcijom, ili uz pomoć dva trokuta, okomitost možemo dobiti i na druge načine
- vježba: presaviti papir 2 puta
KRUŽNICA – skup točaka jednako udaljenih od istaknute točke koju nazivamo središte (polumjer = dužina koja spaja središte s bilo kojom točkom kružnice – ujedno i udaljenost te dvije točke, odnosno duljina te dužine
- nemojte odmah dati definiciju, niti kruga niti kružnice. Počnite s vježbom tipa „stanite ukrug“ ili „stanite ukrug oko mene“, pa neka djeca opišu što to znači. Također, crtajte krug (crtajući kružnicu) vani u dvorištu, na zemlji ili pijesku…
- prikaz kružnice: fiksan štap u zemlji + konop – crtamo u zemlji, pijesku pravilnu kružnicu
KRUG - dio ravnine omeđen kružnicom (odnosno, kružnica je rub kruga)
- središte ne pripada kružnici, a kružnica pripada krugu

4. razred:
KUT – dio ravnine određen dvjema polupravcima koji imaju zajedničku početnu točku. Tu početnu točku nazivamo vrhom kuta, a polupravce krakovima kuta.
- kad crtamo kut, zapravo istovremeno crtamo 2 kuta. Stoga bi trebalo naglasiti o kojem kutu govorimo, kojeg promatramo. U školskoj matematici u pravilu uvijek mislimo na manji kut, pa zaboravljamo na onaj drugi, izbočeni. No, i to je kut…
- kut je zapravo neomeđeni dio ravnine, stoga u definiciji pišem „određen dvjema polupravcima“, a ne „omeđen“
- opet bitna vježba: koja točka pripada kutu, koja ne. Razlikujemo rubne, unutarnje i vanjske točke kuta.
- kako prenijeti kut? možemo se pomoći prozirnicom (paus papirom). Slijedi pitanje – kad je neki kut veći, kad manji, kako uspoređujemo kutove? Možemo se pomoći na isti način. Važno je napraviti vježbu s kutom kojem su krakovi prikazani kratko, a da je on veći, od drugog kuta kojem su krakovi prikazani duljima, no on je uži
- zainteresirane učenike možete podučiti prenošenju kuta uz pomoć šestara

- dalje, kutove možemo razlikovati prema veličini (i to je svojstvo ono što određuje kut…). Pravi kut – nacrtajte ga na nekoliko načina u pijesku (Pitagorine trojke i konop; Tales, kolci, štap i konop)

Nastavna priprema za sat matematike

Među dokumentima na Merlinu postavljen je dokument koji služi kao okvir za pisanje pripreme za ocjenski sat iz matematike. Takav ćemo koristiti na ovom kolegiju i ocjenskim satovima sljedeće godine. To svakako ne znači da ne možete predati drugačiji dokument, samo bi vam trebao dati uvid u ono što je bitno staviti u pripremu.

Pa tako:
- tip sata, nastavna jedinica/tema, ishodi u potpunosti određuju kako ćete osmisliti sat;
- idealno trebate krenuti od ishoda - konzultirajte kurikul, i razradu ishoda u kurikulu - za pojedini sat tu razradu ishoda morate još itekako razraditi! Kasnije poravnate ishode s aktivnostima na satu, odnosno, provjerite gdje će se zaista ishodi ostvarivati;
- svakako NE KREĆETE OD AKTIVNOSTI ☺ (a to volite);
- osnovna struktura sata (uvodni, glavni, završni dio s vremenskim okvirom) koristi vam za lakše raspoređivanje aktivnosti i tempiranje istih, kao i mjerenje "prolaznih vremena" na samom satu
- priprema treba biti takva da svatko može pomoću nje održati sat
- bitno je navesti što više vaših konkretnih rečenica, pitanja, primjera; samim tim će vam biti lakše. Upute za igre navodite pogotovo detaljno
- sve matematičke primjere/zadatke koje ćete napraviti eksplicitno navedite. Jako je bitno stupnjevati primjere i zadatke (načela postupnosti i primjerenosti!)

PRIPREMA:
razred, nastavna tema (cjelina), nastavna jedinica (tema), učiteljica mentorica, studentica, nadnevak izvođenja
OPĆI METODIČKI PODACI:
1. vrsta nastavnog sata
2. ključni pojmovi
3. cilj nastavnog sata
4. međupredmetna korelacija
5. unutarpredmetna korelacija
6. mediji (nastavna sredstva i pomagala)
7. socijalni oblici rada
8. nastavne metode i strategije
9. povezanost s međupredmetnim temama
10. odgojno-obrazovni ishodi učenja: temeljna znanja, vještine i sposobnosti, stavovi i vrijednosti
11. korišteni izvori u izradi priprave

12. struktura sata: uvodni, glavni i završni dio, aktivnosti učenika, nastavnika i metodičko oblikovanje te vrijeme
13. tijek nastavne djelatnosti i aktivnosti učenika
14. plan ploče

Brojevi

- **Brojevi** su apstraktni pojmovi koji predstavljaju količine (ili koje je što po redu).
- Brojevi koje djeca uče od 1. do 4. razreda OŠ: prirodni brojevi, razlomci, decimalni zapis razlomka, cijeli brojevi (osim prirodnih brojeva, svi ostali se pojavljuju na razini naznake, navođenja primjera, a ne sustavnog uvođenja i razumijevanja)

Decimalni zapis razlomka - prirodni nastavak korištenja našeg pozicijskog dekadskog sustava - povijesno se dosta rano javlja u nekoj varijanti – primjerice, postoji glinena pločica s područja Babilona iz otprilike 1700g.pr.ne. na kojoj je zapisana aproksimacija korijena iz 2!

Prirodni brojevi

- Prirodni brojevi su oni koji se javljaju – prirodno - prvi. Radi se o količinama koje možemo prebrojiti, odnosno skupovima čije elemente možemo prebrojiti, a što pak znači i poredati.

Do prirodnih brojeva dolazimo na sljedeći način:

Prepoznajemo najmanje moguće skupove, kao skupove s najmanjim mogućim brojem objekata (a da postoji neki objekt sadržan)… prepoznamo količinu kao zajedničko svojstvo takvih (jednočlanih) skupova i njih sve apstrahiramo pojmom **jedan** (i označimo s 1). Prva sljedeća veća količina dobije se povećavanjem skupova za najmanju moguću količinu objekata… tako dobijemo dvočlane skupove i **dva** kao apstrakciju za sve dvočlane skupove (uvodimo oznaku 2). Zatim promatramo prvi sljedeći veći skup u smislu brojnosti… dobijemo tročlane skupove… i **tri** kao apstrakciju za sve tročlane skupove (uvodimo oznaku 3). I tako dalje. Osnovna veza ovih brojeva odražava vezu između skupova, u smislu prvog sljedećeg većeg skupa. Ta veza je funkcija (ili relacija) **„biti neposredni sljedbenik"**, što možemo označiti sa *s* i u tom smislu imamo vezu: s(1) = 2, s(2) =3, s(3) = 4… tj. 2= s(1), 3 = s (s (1)), 4 = s(s(s(1)))… (dva je neposredni sljedbenik od jedan, tri je neposredni sljedbenik od 2, odnosno drugi neposredni sljedbenik od 1; itd). Kad se uvede **0** za količinu koje nema, onda postaje jednostavno 3 = s(s(s(0))) i slično (3 je treći neposredni sljedbenik od 0!).

- Na sličan način **uvodimo i prirodne brojeve** djeci i to po shemi **I-G-S-Z**:

(I) Primjerice, broj 5 ćemo uvesti tako da podsjetimo na to što bi bio broj 4, prikazujući razne četveročlane skupove. Dobro je da skupovi nisu jednoobrazni – mogu ih sačinjavati istovrsni predmeti, ali i raznovrsni (primjerice, 4 predmeta iz pernice). Nije dobro da su uvijek istovrsni, a pogotovo ne smijemo boju vezati uz neki predmet ili broj (takvih grešaka ima u udžbenicima). Te skupove proširit ćemo do prvih većih skupova, tako da, naravno, u njih ubacimo po još jedan predmet. Tako ćemo ako smo imali četiri jabuke u košari u nju staviti još jednu koju smo ubrali, a ako smo u ruci držali četiri predmeta iz pernice, u nju staviti još jedan predmet koji smo uzeli iz pernice.

(G) Naravno, sve ćemo što pokazujemo popratiti govorom. Dapače, potaknut ćemo djecu da i ona daju takav primjer.
(S) Sljedeći korak je prikazivanje slikama. Jedan od ovih primjera nacrtamo na ploči, primjerice jabuke i onda povećanje količine jabuka u košari za najmanji mogući iznos.
(Z) Preostaje nam da im „otkrijemo" da ćemo novu količinu nazivati **pet** i označavati znakom **5**. Naravno, to su već znali, ali svejedno ćete pomno sve ovo odraditi. Vjerojatno ima djece koja znaju kao pjesmicu izrecitirati brojeve u uzlaznom redoslijedu, ali zapravo ne razumiju njihovo značenje.
Broj: apstraktni pojam koji označava količinu (ili koje je nešto po redu)**.**
Brojka matematički zapis broja (uz brojku, broj možemo imenovati te zapisati kao **brojevnu riječ**). Brojku u našem (pozicijskom, i to dekadskom) sustavu zapisujemo **znamenkama.** Kako je riječ o dekadskom sustavu, imamo 10 različitih znamenaka, odnosno znakova kojima zapisujemo sve brojke (kao što sve brojevne riječi u našem jeziku zapisujemo uz pomoć 30 različitih slova).

- Jedan način da opišete skup prirodnih brojeva **N** jest **aksiomatski**, i to takozvanim **Peanovim aksiomima**. A oni su sljedeći:

(1) svakom elementu *n* iz **N** pridružen je drugi element *s(n)* iz **N** kojeg nazivamo njegovim neposrednim sljedbenikom;
(2) *s(n)=s(m)* samo ako je *n=m;*
(3) 0 je iz **N**;
(4) 0 nije sljedbenik niti jednog broja iz **N**;
(5) (aksiom matematičke indukcije) ako je neki *P* podskup od **N** takav da je 0 iz *P* i za svaki *n* iz *P* vrijedi i da je njegov *s(n)* iz *P*, onda imamo da je *P* upravo **N**.

Krenemo od najmanjeg elementa u **N**, u ovom slučaju (3) to je *0* (mogli smo krenuti i od *1* – nekad se, kao i u školskoj matematici, *0* dodaje u posebni skup kojeg označavamo s **N**0. Sljedeće elemente generiramo uz pomoć funkcije *s* (1) i to tako da uvijek dobijete novi element, nikad se ne vraćate na stari (2). Najmanji element naravno nije neposredni sljedbenik niti jednog broja (4). Aksiom (5) je malo suptilniji – govori o tome da ako imamo strukturu kao ovu što smo upravo opisali – onda upravo i imamo skup prirodnih brojeva pred sobom.
Bitno je razumjeti sljedeće. Djeca (vrtićke dobi) mogu uspoređivati skupove s obzirom na količinu objekata i bez da znaju brojiti. To je vrlo jednostavno… naprosto pridružuju elemente jednog skupa drugima. Primjerice, lako je utvrditi je li u vrtić taj dan došlo više djevojčica ili dječaka, zar ne? Neka svi stanu u parove tako da par čine djevojčica i dječak (a ne dva dječaka, ili dvije djevojčice). Ako ostane višak djevojčica ili dječaka, znat ćemo da je tih došlo više, a ako viška nema, očito je da ih je došlo jednako mnogo.
Također mogu lako vidjeti je li više stolica ili djece, zatim žličica ili tanjurića. Ovakve uvodne primjere možete napraviti u prvom razredu. Ovakvo uspoređivanje veličina skupova zasniva se – na uspostavljanje **preslikavanja (funkcije)** između dva skupa. U slučaju stolica i djece, ako na svaku stolicu sjedne točno jedno dijete, preslikavanje koje smo uspostavili jest **bijekcija**. U slučaju da je jednih manje, primjerice djece, onda ostaje višak stolica, a mi smo uspostavili takozvanu **injekciju** (injektivno ili 1-1 preslikavanje, uočite kako je ovo 1-1 „jedan na jedan" slikovito!) između skupa djece i skupa stolica.

Dakle, ako imamo dva skupa *A* i *B* ukoliko možemo uspostaviti bijekciju među njima kažemo da su ti skupovi **jednakobrojni** ili **ekvipotentni**. Tako je „pet“ oznaka za sve ekvipotentne skupove koji imaju … naravno, pet … elemenata. Matematičkim žargonom, prirodni brojevi nam predstavljaju klase ekvivalencije ekvipotentnih skupova. Ako niste oduševljeni ovom formulacijom, nemojte se previše uzrujavati ;) Radi se o tome da je „biti ekvipotentan“ relacija ekvivalencije na skupovima. Pa tako „odvoji“ skupove od jednog elementa u jednu tzv klasu ekvivalencije, pa one s dva elementa u svoju, s tri… itd. Podsjetimo se što znači da se radi o relaciji ekvivalencije:

(1) svaki skup je jednakobrojan samom sebi;
(2) ako je *A* jednakobrojan *B*, onda je i *B* jednakobrojan *A*;
(3) ostavljam da se sjetite tranzitivnosti…

Jasno je da nam uspostavljanje bijekcije na skupovima daje jednakost na prirodnim brojevima, a uspostavljanje injekcije relaciju ⍰⍰na prirodnim brojevima (ako imamo injekciju koja nije bijekcija, naravno da smo uspostavili strogu nejednakost ⍰ na prirodnim brojevima).

Kako ćemo uspoređivati brojeve uvedene kao na početku priče? Možemo definirati relacije = i $\leq$ na sljedeći način.

=

$m = n$ ako i samo ako $m = 0$ i $n = 0$

ili $m = s(m')$ i $n = s(n')$ i $m'=n'$

Čitamo: m je jednako n ako i samo ako vrijedi da su oba jednaka 0, ili, u slučaju da nisu jednaki nula, ako je m sljedbenik od m', n sljedbenik od n' i vrijedi da je $m'=n'$.

Zamislite kako bi malo dijete provjerilo je li na dvije hrpice jednaka količina špigula (špekula, pikula): uzelo bi sa svake hrpice jednu (i dobije onih m' i n' špigula). Ako sad vidi jesu li hrpice jednake, staje. Ako ne vidi, uzme opet sa hrpice po jednu. Nastavlja dok ne vidi jesu li jednake – u našem slučaju „vidimo“ tek kad dođemo ovim postupkom do kraja, do slučaja kad su obje hrpice istovremeno nestale.

Uspoređivanje prirodnih brojeva

Prirodne brojeve uspoređujemo uz pomoć relacija =, ≤, ≥, <, >. Sve njih, direktno ili indirektno, definiramo uz pomoć funkcije (relacije) „biti neposredni sljedbenik“ s. Još jednom, prirodni brojevi povezani su na sljedeći način 0 ako i samo ako $1=s(0)$ ako i samo ako $2=s(s(0))$ ako i samo ako $3 = s(s(s(0)))$…

Iz neposrednog sljedbenika lako izvedemo relaciju „biti neposredni prethodnik“: m je neposredni prethodnik od n ako je n neposredni sljedbenik od m , tj. ako je $n=s(m)$.

Jedna varijanta…

$m \leq n$ akko $n = m$

ili $n = s(n')$ i $m \leq n'$ (*n* je neposredni sljedbenik broja od kojeg je *m* manji ili jednak)

Onda relaciju „biti manji od“ možemo definirati ovako

$m < n$ akko $n=s(m)$ (*n* je neposredni sljedbenik od *m*)

ili $n=s(n')$ i $m < n'$ (*n* je neposredni sljedbenik broja od kojeg je *m* manji)

Naravno, relaciju „biti manji od“ možemo definirati i tako da prvo definiramo kada su *m* i *n* različiti, te onda da je $m < n$ *akko* $m \leq n$ *i* nije $m = n$.

U redoslijedu *0* ako i samo ako *1=s(0)* ako i samo ako *2=s(s(0))* ako i samo ako *3 = s(s(s(0)))...* prirodne brojeve slažemo na **brojevnu crtu**. To je ravna crta, neomeđena (dakle pravac, ergo brojevni pravac) kojem prvo označimo točku, nazovemo je *O* i pridružimo joj vrijednost 0. Zatim, tipično desno od nje, odredimo novu točku, nazovemo ju *E* i njoj pridružimo vrijednost 1. Dužinu *OE* nazivamo **jediničnom dužinom**, a njenu duljinu **jediničnom duljinom**. U istu stranu na koju smo nanijeli 1 u odnosu na 0 nanosimo od 1 jediničnu dužinu – novoj krajnjoj točki pridružimo broj 2. Ponovimo postupak, novoj krajnjoj točki pridružimo broj 3. I tako dalje. Na desni kraj brojevne crte tipično stavimo strelicu – ona označava **smjer rasta brojeva na brojevnoj crti.**

Uočimo još nešto kod relacije ≤, za nju vrijedi:

1. ako $m \leq n$ i $n \leq m$, onda $m = n$;
2. ako $m \leq n$ i $n \leq p$, onda $m \leq p$;
3. za sve prirodne brojeve vrijedi $m \leq n$ ili $n \leq m$.

Kako zovemo svojstvo 1., odnosno 2.?

Svojstvo 3. nazivamo **totalnost**, a relaciju sa svojstvima 1, 2 i 3 **totalnim uređajem** (relacija < ima samo svojstva 1 i 2, i nazivamo je **uređajem**).

Kako djeca broje?

- Ponovimo jednu od bitnih karakteristika skupa prirodnih brojeva: prirodne brojeve možemo **poredati.**
- Također, prisjetite se da postoje sljedeće kategorije: glavni (kardinalni) i redni (ordinalni) brojevi kod prirodnih brojeva.
- Za razliku od **sedam (7)** koji predstavlja **količinu** od naravno sedam, **sedmi (7.)** predstavlja jednog koji je na sedmoj **poziciji**… a sedma pozicija odgovara poziciji broja 7 u skupu prirodnih brojeva **N** (bez nule).
- Dakle, sedmi (7.) je u vezi s početnim nizom [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] skupa prirodnih brojeva **N**. Dvadesetisedmi pak s početnim nizom [1, 2, 3, …, 26, 27].

Nama je bitno da djeca (i mi) razlikujemo glavne od rednih brojeva. Da ih ne podučavamo da je **tri (3)** isto što i **treći** prstić na ruci, srednjak. To je upravo česta greška odgajatelja i roditelja koji ne razumiju dovoljno matematiku. Dijete koje je tako instruirano naprosto neće razumjeti da je 3 oznaka za sve tročlane skupove, za količinu. Često se to dogodi kad se **inzistira** na brojenju na prstiće. Prstići su pak jako dobri kasnije, u brojenju većih količina – svakako većih od 5, a pogotovo većih od deset, te računanju s količinama. Prstići su prva sprava za računanje. Zato su i prvi brojevni sustavi prilagođeni broju prstiju ili dijelova prstiju.

Djeca u pravilu ne razumiju brojeve prije treće godine. Mogu razlikovati jedan i više, odnosno jedan, dva i više. S manje od četiri godine mogu razumjeti i veće količine odnosno brojeve 3, 4 i 5. Provjeriti razumiju li to je lako – pitajte više puta koliko je tu kockica, koliko imaš dugmića na jakni, koliko boja na papiru… Malo je teže podučiti ih. Svakako je prvi korak podučiti ih uzlaznom nizu brojeva: jedan, dva, tri, četiri… (tipično do 10). To djeca nauče kao pjesmicu, i to u pravilu znaju u predškoli. No, ne znaju svi brojiti, odnosno, ne razumiju svi brojeve (inače ih ne bismo podučavali u školi, već bismo pretpostavili da to znaju iz vrtića).

Podučavanje svakako ide s puno primjera, skupova male količine. Koliko ih je? (imamo tri predmeta) Proširili smo skup – dodali još jednu kuglicu – koliko ih je sad?

Kad djeca usvoje da je brojenje određivanje veličine skupa, odnosno količine objekata u skupu, ona će to raditi na neki od sljedećih načina (s vremenom idemo od 1. prema 5.):

1. odvajanjem predmeta odnosno pomicanjem;
2. dodirivanjem;
3. pokazivanjem prstićem;
4. pogledom;
5. mentalno.

Odvajanje/pomicanje znači sljedeće: istresemo sadržaj pernice, i iz hrpe odvajamo predmete i brojimo. Izdvojimo jedan predmet i kažemo „jedan“, njemu pridružimo još jedan i kažemo „dva“ itd. Uočite da pritom svakom od predmeta stavljamo „naljepnicu“, odnosno njegov redni broj. To znači da moramo paziti da djeca ne pomisle da se radi o redanju, i da svaki predmet ima točno jednu oznaku (rednog broja). Kako biste se osigurali da ne dođe do takve pogreške, isti skup (predmete iz pernice) prebrojite nekoliko puta, pomičući predmete u različitim redoslijedima!
Dodirivanje je slično, ali se fizički ne odvajaju predmeti. Isto se „lijepe“ etikete, odnosno redni brojevi, i treba brojiti u više redoslijeda u odnosu na etiketiranje predmeta. Naravno, mentalno vodimo računa o grupiranju, odnosno koje smo predmete već pobrojili, koje nismo.
Pokazivanje je kao i dodirivanje, ali još malo apstraktnije jer se gubi kontakt s predmetima.
Brojenje pogledom je pak kao prethodno i još apstraktnije, predmete „pokažemo“ tako da ih pogledamo.
Mentalno brojenje je ono kod kojeg, prema iskustvu, odmah „vidimo“ koliko je predmeta pred nama. Primjerice, vi skup od četiri predmeta ne idete prebrojavati, vidite da se radi o četiri predmeta. Dokud to ide? Pokušajte! Trebali biste uspjeti maksimalno do 6-7, više ne.

BROJ 0

- Istraživanja pokazuju donekle različite rezultate vezano za usvajanje broja 0 kod djece, odnosno za to koliko im je lako usvojiti broj (količinu) 0.
- U ovom slučaju sigurno je djeci vrlo prirodno razumjeti da nečeg **nema**. I vrlo brzo mogu usvojiti količinu „**nijedan**“.

Tipični primjer: bile su tri ptičice u gnijezdu. Prvo je jedna odletjela (koliko ih je ostalo?). Zatim je još jedna odletjela (koliko ih je sad ostalo?). Još je jedna odletjela – koliko ih je sad ostalo u gnijezdu? **Nijedna**!
Sljedeći korak je povezivanje količine „nijedan“ s brojem „nula“. Koliko je ostalo ptičica u gnijezdu? Nijedna, nula. Koliko je ostalo jabuka u zdjeli nakon što smo sve pojeli? Nijedna, nula.
Zatim se 0 smješta na brojevni pravac (prvo smo smjestili brojeve od 1 do 5). **Bitno**: **uvijek** pustite malo lijevog kraja brojevne crte (pravca) slobodno! Nemojte niti 1 niti 0 smjestiti na lijevi početak! Ima manjih brojeva…
Tako da djecu možete pitati: koji je najmanji broj koji poznaješ? Prvo će to biti 1, pa 0. Naravno da će s vremenom upoznati manje.
Nakon uvođenja na brojevnu crtu, i pokazivanja na primjerima (djeca uzimaju jabuke iz zdjele, prazna zdjela s jabukama, vraćamo prvo jednu jabuku u zdjelu, zatim još…) treba biti jasno da je neposredni sljedbenik od 0, prva veća količina, broj 1, tj. $s(0)=1$.

➤ povijesno je postojala neobična “stigma” našeg, „zapadnog“ društva, oko 0.

➤ U prvim brojevnim sustavima nula služi kao neki „znak” za prijelaz i ne žele ju pisati na kraju

➤ Mezopotamija/Babilon, oko 300g.pr.n.e. “placeholder”, **nalik na nulu.**. (nije pisana zasebno, niti kao posljednja znamenka)

➤ Indija, od 300g.pr.n.e. do otprilike 300g… “razvoj” nule

➤ Kina, oko 300g.pr.n.e. -> svi “napipavaju” ulogu nule u pozicijskom sustavu
Nije ni djeci u potpunosti prirodna, ali nije niti neprirodna! - potrebno i je neko vrijeme da ju prihvate kao „količinu koje nema”.

➤ no, lako djeca opisuju da nečeg **nema**, pa čak i da ima **nijedan**

➤ **na tom tragu (takvim primjerima) uvodimo riječ i oznaku količine 0**

➤ slijedi uvođenje na **brojevnu crtu** - **pazite da vam je lijevi kraj brojevne crte slobodan!**

➤ **strelica** na brojevnoj crti desno prikazuje **SMJER RASTA VRIJEDNOSTI**

➤ usput, razlikujemo skupove **N** i **N0**

➤ nekad se svrstava u prirodne brojeve, a nekad je u skupu No (tehničke prirode) – npr. N/Z, brojnik može biti 0, nazivnik ne ili kad rastavljamo na faktore (nula ne)

➤ sada 0 postaje najmanji broj kojeg poznajemo, a 1 njegov neposredni sljedbenik

BROJEVI 10-19

Ako smo razumjeli kako djeci objašnjavamo i **uvodimo brojeve do deset**, onda – samo nastavimo tim putem.

Ponovimo, djeca (vrtića) u pravilu znaju nabrojiti brojeve u rastućem nizu do 10. Ako trebate obraditi broj 8, prvo ćete ih podsjetiti na to što znači 7, pokazati **(I)** neke 7-člane skupove. Nakon toga ćete povećati skup za najmanju moguću količinu **(I).** Naravno, to sve možete „upakirati“ u nešto ljepše i zanimljivije – primjerice, ispričati im priču o Snjeguljici i sedam patuljaka, odnosno pročitati uvod, i pitati koliko je likova u priči (ako izuzmemo životinjice koje se pojavljuju…). Govorom **(G)** ćete naravno izdvojiti bitno, opisati 7-člani skup, njegovo proširivanje i dolazak do količine **osam**, a sve ćete to popratiti sličicama **(S)**, u ovom primjeru patuljaka i Snjeguljice. Na kraju ćete uvesti matematički zapis brojkom 8 **(Z)**.

Dakle, istu stvar biste radili s većim brojevima – koliko možete pozivate se na **konkretno**. Sve **do 20 prikazujete količine**, brojeći s djecom (idealno je da učenici broje). Naravno, sad usvajanje ide brže. Bitno je opet da zapamte **nazive** (brojevne riječi) i u **rastućem redoslijedu** bez greške broje od 0 do 20, pa od 10 do 20, pa unazad… Ova vježba je izvrsna – mogu ju izvoditi vrtićarci, a bitna je za školarce. Može se razraditi, na način da se broji od 0 za 2, ili od 0 za 5, ili od 0 za 3… Na taj način dobijete sve parne brojeve, pa sve djeljive s 5, sve djeljive s 3… Ovo postaje bitno kad se uvedu brojevi do 100.

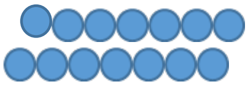
Nužno je brojke smještati na **brojevnu crtu**. Prisjetimo se kako: na ravnoj crti (pravcu) označimo točku koju nazovemo *O* i dodijelimo vrijednost 0. Tipično desno od nje označimo drugu točku koju nazovemo *E* i dodijelimo vrijednost 1. U istu stranu nastavljamo označavati točke na način da udaljenost *OE* prenesemo i novodobivenoj točki pridružujemo vrijednost 2. Nastavljamo…

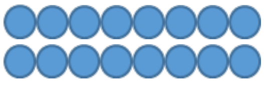
Važno je popuniti brojevnu crtu brojevima do 20 (kasnije ćemo nekad promatrati samo dijelove brojevne crte, raditi zoom-in i zoom-out, brojiti po 10 ako nam je zgodno, promatrati samo komad od recimo 24 do 32 jer nas tamo nešto zanima...). Brojevna crta je manje apstraktna reprezentacija brojeva i njihovog uređaja, i jako je bitno da ju djeca razumiju, koriste, vizualiziraju. **Kad god djeca zapnu na brojanju ili računanju do 100 – vraćajte ih na brojevnu crtu koju sami trebaju crtati, smještati na nju brojeve, po njoj se pomicati, uz pomoć nje brojiti (naprijed, nazad, napreskok...).**
Uočite kako brojevne riječi odgovaraju smislu broja: „jedanaest“ znači „jedan na deset“ (dakle, jedan smo dodali na hrpicu od deset), „dvanaest“ je „dva na deset“ itd. Takve se tvorbe pojavljuju u većini indoeuropskih jezika (svima?). Čak i neočiti *eleven* i *twelve,* tj. *elf* i *zwölf* dolaze od *ein-lif* i *zwo-lif*, s istom idejom.
Još jedna bitna napomena: kada u prvom razredu uvodite brojeve do 20, po meni **nema mjesta** govoru o dvoznamenkastim i jednoznamenkastim brojevima. Kao što eventualno možete govoriti o deseticama i jedinicama, ali **samo na razini** toga da prvih deset (štapića) skupite na **hrpicu (u svežanj)**, i to opet napravite kad dođete do 20, dakle drugih 10. **Eventualno** spomenete da znakove 0, 1, 2,..., 9 nazivamo **znamenkama**.

BROJEVI 10-20

- na isti način ih uvodimo kao i brojeve do 10 npr. prebrojavamo, slike, kalendar...
- famozna I-G-S-Z shema!
- što dalje?
- brojenje unaprijed i unazad, sa i bez broj**evne crte**
- **jako bitno: uvesti pedantno brojevne riječi, povezati s brojkom**
- količina 12 = tucet (eng. dozen)
- **nije još trenutak za objašnjenje pozicijskog sustava!**

- taj trenutak, za objašnjenje pozicijskog sustava, (bolje) je onaj kada uvodimo brojeve veće od 20
- primjer... kako ćemo usporediti količinu od 14 i 16? - „pametno” ćemo ih urediti (a u stilu dekadskog pozicijskog sustava) i onda uspoređujemo samo 4 i 6





- to će kod brojčanog zapisa biti usporedba znamenki
- prije priče o znamenkama i mjesnim vrijednostima ipak trebamo uvesti što više brojeva (brojevnih riječi, brojki, prikaza)

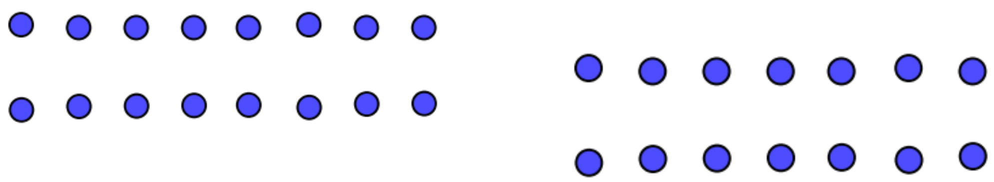
BROJEVI 20-100

➤ količine… one od 20 do 30. Broj djece u razredu? I dalje se još neko vrijeme pozivamo na konkretno! (I)

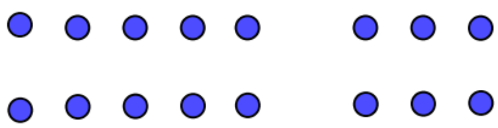
- treba ih upoznati sa što većom količinom brojki i riječi
- uvoditi tako da grupiramo po 10 – npr. 20 su dvije hrpice po 10
  21 su dvije hrpice po 10 + 1
  .... 30 e to su TRI hrpice po 10
- uvođenje brojevnih riječi npr. 35
  trideset i pet
  tridesetpet(prije) / trideset pet (danas)
  3 D 5J
- do 30, 40 prikazujemo konkretne količine desetica (npr. karton jaja) + jedinice ili lego kockice

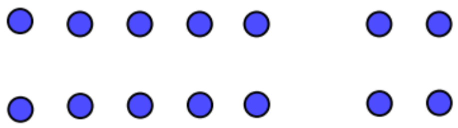
➤ dvadeset pa 21, 22…
➤ trideset pa 31, 31…

Podsjetimo se, radi se o gradivu početka drugog razreda. Prije uvođenja brojeva većih od 20 treba ponoviti brojeve do 20, s naglaskom na 10-20. Pri tom ponavljanju treba naglasiti grupiranje količina u hrpice od 10 (ono se i radi kod uvođenja brojeva 10-20). Uspoređivanje količina odnosno brojeva dobra je motivacija za grupiranje (predmeta koje brojimo…).
Imamo dvije hrpice kuglica (recimo 14 i 16), kako ćemo ih usporediti, kako ćemo vidjeti gdje ih je više?



Ako nisu posložene, teško da bismo vidjeli lako kojih je više, bez prethodnog brojanja. Ako ih posložimo ne baš posebno smisleno (kao na gornjim slikama, dvije hrpice su namjerno razmaknute i nisu jedna pored druge kako ih ne bismo uspoređivali duljinom – iako, i to je jedan sasvim racionalan način) nećemo ni tada napredovati u rješavanju problema. No, ako imamo pravilo po kojem slažemo, onda svakako olakšavamo. Naše pravilo bit će grupiranje u hrpice od deset. Ovako je očito kojih je više.





Naravno, na brojevima će to značiti uspoređivanje uspoređujući **znamenke**. Tako će se za brojeve od 10 do 19 problem uspoređivanja svesti na problem usporedbe druge znamenke u zapisu (no mora biti jasno zašto je to tako). Dobra vijest je, dakle, ako znamo usporediti brojeve 0-9, neće nam biti nikakav problem usporediti brojeve 10-19.
Pojam znamenka, kao i jednoznamenkasti te dvoznamenkasti broj, svakako uvodimo kad uvodimo brojeve veće od 20. No prethodno treba uvesti nazive i zapise brojkom…
Tako redom:
dvadeset, dvadeset i jedan, dvadeset i dva, dvadeset i tri…
trideset, trideset i jedan, trideset i dva…
četrdeset, četrdeset i jedan, četrdeset i dva…
Prve količine još pokušavamo prikazati konkretno, odnosno izbrojiti (primjerice broj učenika u razredu, ili broj stolica, broj igrača na nogometnom terenu…).
No, sad zaista sve količine prikazujemo grupiranjem po 10. Takvim grupiranjem bolje se razumiju količine, odnosno smisao brojevne riječi. Tako je iznimno bitno da djeca razumiju da je „dvadeset“ dvije hrpice od 10, 24 dvije hrpice od deset i još 4 „solitarna“, „trideset“ su tri hrpice od deset, „četrdeset šest“ četiri hrpice od deset i 6 slobodnih…
Na taj način postaje jasna količina, smještanje brojeva na brojevnom pravcu u smislu rastućeg niza, uspoređivanje brojeva do 100.
Ako količine prikažemo štapićima, jedna mogućnost je grupirati u svežnjeve po deset.
Zatim se brojevi prikazuju uz pomoć simboličkih desetica i jedinica, pa tako 34 kao tri kartice na kojim piše 10, i četiri kartice na kojima piše 1.
Zatim se isti prikazuju simbolički uz pomoć „D“ i „J“ (34 = 3D 4J).
Svi navedeni brojevi smještaju se na brojevnu crtu. Vježbe:

- imenovati i zapisivati brojkama,
- rastavljati i sastavljati na desetice i jedinice,
- brojiti započevši od nekog broja, unaprijed i unatrag,
- brojiti desetice,
- brojiti za 2, 3, 5, …
- uspoređivati brojeve,
- vježbanje računskih operacija..

Uočite kod brojevnih riječi kraće i dulje varijante: „trideset šest“ i „trideset i šest“.
Svakako, ovo je vrijeme za usvajanje pojmova znamenka, **jednoznamenkasti broj, dvoznamenkasti broj, desetica, jedinica, mjesna vrijednost desetice, mjesna vrijednost jedinice.**

➤ svakako ćemo količine prikazivati kao hrpice od 10 i ostatak
➤ zatim ćemo brojeve prikazivati uz pomoć simboličkih kartica 10 i 1
➤ primjerice, 52 ćemo prikazati kao pet kartica 10 i dvije kartice koje vrijede 1

- nakon toga, prikazat ćemo simbolički 52 kao 5D 2J
- svakako, ovdje uvodimo pojmove znamenke, **jednoznamenkastog broja, dvoznamenkastog broja, desetice, jedinice, mjesne vrijednosti desetice, mjesne vrijednosti jedinice**
- treba obratiti pažnju na brojevne riječi i ispravno pisanje
- smještanje na brojevnu crtu
- brojanje unaprijed i unazad
- brojanje po 10
- brojanje po 2, 3, 5
- uspoređivanje brojeva (nikako ne smije biti “po formuli”!, mora biti jasno)
- operacije na brojevima…

BROJEVI VEĆI OD 100

- nema više konkretnih primjera (do 30-40), ali možemo prikazivati količine uz pomoć didaktičkih pomagala (Dienesovi blokovi, odnosno neka varijanta Stern blokova, npr)
- grupiramo po 100 (čini ih naravno 10 desetica), pa po 10, pa ostalo…
- počinjemo brojiti 101, 102, 103, … (upitamo njih znaju li brojiti 101,102...)
- učimo stotice: 100, 200, 300… kada ih uvedemo, bitno je korektno uvesti nazive (nekoliko načina pisanja)
- 100 je “sto” ili “stotina”
    - 125 = sto dvadeset i pet ili sto dvadesetpet
- dvjesta? trista? arhaični oblici (postojao je i *četirista*) – nalazimo ih na novčanicama
- 200 dvjesto/dvjesta ili dvije stotine, 300 tristo/trista ili tri stotine
- brojevi se prikazuju uz pomoć apstraktnih stotica, desetica i jedinica (npr. novčanice)
- prvo u obliku kartončića 100 10 1
- slobodno koristite različite oblike i boje - ali nemojte ih naviknuti na uvijek iste!
- zatim prikaz tipa 362 = 3S 6D 2J
- mentalno brojenje unaprijed i unatrag (od nekog broja, za neku vrijednost…)
- smještanje na brojevnu crtu

ZNAČI: kad uvedemo brojeve kreće mentalno brojenje unaprijed i unatrag + brojenje uz brojevnu crtu (važne vježbe)

- uspoređivanje brojeva
    - razumiju li koji broj je veći, a koji manji
    - prvo je bitno sve brojeve smještati na brojevnu crtu, i razumijeti redoslijed
    - tek poslije uspoređujemo formalno
    - opći algoritam :
      - uspoređujemo prvo brojeve prema broju znamenki
      - više znamenki > od onoga s manjim brojem znamenki
      - ako je broj znamenki jednak uspoređujemo znamenke najveće mjesne vrijednosti, zatim sljedeće… npr. 363 i 472
      3 < 4 pa je 363 < 472

BROJEVI VEĆI OD 1000

➤ ponavljamo: uvodimo najprije tisućice 1000,2000,3000...

➤ pazimo na nazive ("tisuća" ili "tisuću"?) tisuću = za brojeve tisućudvadeset i tri i na novčanici

➤uvodimo kartončić i T

➤ dalje desettisućice, stotisućice… pa milijun

➤ grupiranje; kartončići; DT, ST i M

➤ brojenje unaprijed i unatrag

➤ smještanje na brojevnu crtu

➤ uspoređivanje brojeva

➤ uočite: osim dekadskog sustava koristimo i grupiranje po 1000 u zapisu: 1 000 000 000 ….(grupe znamenaka po tri)

➤ to se onda primijeti i u nazivima: 1000 tisuća je milijun, 1000 milijuna je milijarda, 1000 milijardi je bilijun…

➤ bitno: svaka znamenka na mjestu lijevo ima deset puta veću vrijednost od susjedne na mjestu do desno

Povijesni razvoj brojevnih sustava

(na slajdovima na sustavu za učenje na daljinu)

BROJEVNI SUSTAV:

- jest **sustav za zapisivanje** brojeva BROJKAMA; matematička notacija za predstavljanje brojnosti danog skupa, odnosno neke veličine ili količine
- sustav koji koristimo je takozvani **dekadski pozicijski** sustav

PRAPOVIJEST:

- najstariji zapisi na kostima stari su možda i 40 000 godina (Lebombo babunova kost, Vučja kost iz Vjestonica, Išango babunova kost)
- osim zareza, koristili su se i kamenčići kojima se brojalo i čuvalo podatak o količini (stoku primjerice)
- Zagros (Iran), 8000-4400.g.pr.n.e.

POVIJEST:

- razvoj pisma oko 4000-3500g.pr.n.e.
- razvoj matematičkog pisma slično… 3500.-3000.g.pr.n.e.
- Mezopotamija (svaki grad ima svoj num. sustav), Egipat
- razvoj aritmetike i geometrije
- razvija se matematika u najvećoj mjeri zbog oporezivanja
- heksagezimalni brojevni sustav!

MEZOPOTAMIJA I BABILONSKA KULTURA

- najsnažniji razvoj za babilonske kulture, oko 19. - 6. st. pr.n.e.
- najveći broj glinenih pločica
- izrazito dobri astronomi - rade efemeride
- utjecaj: 360°, 60', decimalni zarez…

- **heksagezimalni** sustav (3400g.pr.n.e)
- postoji i neki oblik decimalnog zapisa
- na tabletu starom 3600 godina pronađen je zapis aproksimacije korijena iz 2
- koriste u zapisu varijantu nule

EGIPAT

- isto u najvećoj mjeri razvoj zbog mjerenja zemljišta i poreza
- izvori su papirusi (Moskovski, Ahmesov/Rhindov…), 1900g.pr.n.e. - 1500g.pr.n.e.
- problemi su bili aritmetički i algebarski (račun i jednadžbe) te geometrijski (površine i volumeni)
- problemi iz: trgovina (žitarice, kruh, pivo!), površine tla, volumeni i nagibi piramida
- dekadski sustav, ali nije pozicijski (3100g.pr.n.e.)
- imaju neku vrstu zapisa nule
- zapisuju razlomke, imaju dobru aproksimacija broja **π** (kao 256/81)

BROJEVNI SUSTAVI

- sustav brojki koji mi koristimo (**indoarapske** brojke) je takozvani **pozicijski** sustav
- 383
- crna znamenka 3 i crvena znamenka 3 nemaju isto značenje!
- vrijednost znamenke (znaka) ovisi o poziciji u zapisu
- ima sustava kod kojih znak ima uvijek ili gotovo uvijek istu vrijednost. Takvi sustavi su primjerice **adicijski sustavi**, česti kroz povijest – ukupna vrijednost se dobije zbrajanjem pojedinačnih vrijednosti (pa pozicija nije bitna)
- **adicijski** sustavi - egipatski, grčki (400g.pr.n.e.), fenički (250g.pr.n.e.). Kod glagoljice smo isto mogli uočiti da su slovima pridružene vrijednosti. Sustav novčanica je upravo adicijski sustav, na puno načina možemo prikazati traženu vrijednost.
- rimski sustav (1000g.pr.n.e.) je nešto između: IX i XI npr, kod XI se vrijednost računa adicijski, kod IX suptrakcijski. Dakle, značenje ovisi o poziciji, ali ne radi se o uobičajenom pozicijskom sustavu (gdje razlikujemo pozicije veće vrijednosti, od pozicija manje vrijednosti)

POZICIJSKI SUSTAVI

- **konačan (mali) broj znakova** kojima možemo prikazati sve (prirodne) brojeve! U našem konkretnom slučaju (dekadski pozicijski sustav) taj broj je 10, u slučaju binarnog sustava bio bi dva, u slučaju primjerice heksadecimalnog sustava to je 16
- kod adicijskih sustava možda i ne moramo generirati nove znamenke, znakove… no, s vremenom nam sigurno takav zapis postaje nepraktičan (nešto kao male novčanice u slučaju inflacije). Kod rimskog brojevnog sustava sa suptrakcijom čak se ne bi ni to moglo, već smo osuđeni na uvođenje novih znakova
- no, zapis kod adicijskog sustava nije **jedinstven** - kod pozicijskog da
- također, zapis je u slučaju pozicijskog sustava **koncizan**
- **računanje? algoritmi?** Možda je stvar navike, ali čini nam se da su ipak algoritmi za računanje u pozicijskim sustavima jednostavniji, elegantniji

Matematički zadatak

Osnovni principi vezano za smišljanje i rješavanje zadataka: (MERLIN)

Svi materijali dostupni su na prezentacijama na Merlinu, zajedno s raspisanim rješenjima većine zadataka.

- zadatak mora biti primjeren, dovoljno zanimljiv, dovoljno izazovan;

- zadaci moraju biti zadani jasno i nedvosmisleno - obavezno ih precizno zadajte u pripremi;

- o zadatku treba promisliti nakon čitanja, te nakon dobivanja konačnog rezultata. Po čitanju treba zapisati zadane podatke i obrazložiti zašto (ste zapisali upravo tako). Rezultat uvijek treba analizirati - je li zaista dobiveno rješenje, je li to jedino rješenje, jesmo li mogli drugačije riješiti zadatak?

- važno je poticati na rješavanje, i na to da djeca počnu s rješavanjem. Svi bi morali barem početi sa zapisivanjem zadanih podataka (opet, uz razumijevanje što i zašto zapisuju).

- ako su i pogrešno rješavali, bolje je prekrižiti nego brisati - tako ostaje zapis greške kao pouka za sljedeća rješavanje;

- više načina dolaska do rješenja u matematici je uvijek poželjno. Vrlo rijetko ima smisla "tjerati" djecu da upravo na određeni način dođu do rješenja (u slučaju da želimo izvježbati jednu tehniku). Ako riješe zadatak na nekoliko različitih načina, dobro je analizirati zajednički (na ploči) te različite načine i pohvaliti njihovu matematičku kreativnost.

Metoda uzastopnih približavanja

- metoda je vrlo intuitivna
- radi se o prirodnom načinu dolaska do rješenja, kojeg će se svako dijete samo sjetiti
- **potičite približno računanje!**
- primjer: Davorka je starija od Jadrana 3 godine, a zajedno imaju 11 godina. Koliko godina ima Davorka, koliko Jadran?
- Pokušajmo: D 8, J 5 - prevelik je zbroj! D 6, J 3 - premali je zbroj! D 7, J 4 ✓
- obavezno kod rješavanja svakog zadatka: prikazati zadano, pitati se što se traži
- Može se uvesti vrlo rano i treba ju poticati kod učenika
- ova metoda potiče na **pokušaj rješavanja** što je izrazito bitno i više načina rješavanja npr. 23+33 neka oni kažu barem približno 50 i nešto, ne i dati da samo algebarski računaju
- obavezno prikazati zadane podatke i pitati što se traži!
- Barem neka nešto napišu, krenu – ako niste dobro izračunali (ako smjer nije dobar) ne brišite, prekrižite jer ćete iz toga naučiti što ste krivo radili :)

Zadaci:

Na izletu je 32 učenika smješteno na sljedeći način: djevojčice u dvokrevetne, dječaci u trokrevetne sobe. Za smještaj djevojčica upotrijebljena je jedna soba više nego za smještaj dječaka. Koliko je soba bilo potrebno za smještaj djevojčica, koliko za smještaj dječaka?

dječaci: ... koliko ih je?

djevojčice: .... koliko ih je?

SOBE DJEV.	SOBE DJEČ.	DJEVOJČ.	DJEČACI	UKUPNO
5	4	10	12	22
6	5			
7	6			

Umnožak tri broja je 270. Koji su to brojevi ako se zna da je umnožak prvog i trećeg 30, umnožak drugog i trećeg 135?

I	II	III	II * III
3	9	10	90
2		15	

Biramo ih tako da umnožak prvog i trećeg bude 30, drugi izračunamo…, i provjerimo zadnji stupac. Očito drugi nije morao biti u tablici!

U dvorištu imamo domaće kokice i praščiće, s ukupno 44 glave i 100 nogu. Koliko je kojih?
kokica …. 1 glava 2 noge
praščić …1 glava 4 noge Birat ćemo prema uvjetu da ih je ukupno 44.

kokice	praščići	Kokice noge	Praščići noge	Ukupno noge
23	20	40	80	128
30	14	60	56	116
34	10	68	40	108

U 40 pakiranja stavljeno je 125kg šećera, od čega su neka pakiranja od 2kg, a neka od 5kg. Koliko je kojih?

MATEMATIČKI ZADATAK - Singapurska ili grafičko-aritmetička metoda
(na prezentaciji je sve grafički prikazano…)
SINGAPURSKA METODA (MODEL BLOKOVA)

- grafički prikazujemo podatke i operacije na njima
- vrlo je intuitivna
- može se krenuti od najranijeg uzrasta (prvog razreda, drugog razreda?)
- što zornije prikazati podatke i operacije

ZBRAJANJE
1. Na grani su bila četiri vrapčića. Doletjela su još dva. Koliko ih je sada na grani?

ODUZIMANJE
2. Bilježnica ima 20 stranica. Matko je ispisao 13 stranica. Koliko je stranica ostalo prazno?

MNOŽENJE
3. Mama je ispekla 4 torte. Za svaku je potrošila 6 jaja. Koliko je jaja ukupno potrošila?

DIJELJENJE
4. Marina je za 6 dana pročitala 54 stranica jedne knjige. Svaki dan pročitala je isti broj stranica. Koliko je pročitala stranica u jednome danu?

5. U plesnoj skupini je 48 djece. Ako ima 10 djevojčica više nego dječaka, koliko je dječaka u plesnoj skupini?

6. Mama je 20 godina starija od kćeri. Ako će za 10 godina imati dva puta više godina od kćeri, koliko imaju sada?

7. Marko i Antonio imaju svaki po 72 bombona. Kad Marko Antoniu da dvije šestine bombona, koliko će Antonio imati više bombona?

8. Razlika dvaju brojeva je 7777. Ako se umanjenik umanji za 444, a umanjitelj uveća za 111, kolika je razlika dobivenih brojeva?

METODA RJEŠAVANJA UNATRAG

1. Ivan, Ante i Darko skupljaju sličice. Prvo je Ivan dao drugoj dvojici onoliko koliko je već svaki od njih imao. Zatim je to isto učinio Ante, a na kraju i Darko. Poslije je svaki imao 80 sličica. Koliko su imali na početku?

- Krenut ćemo od poznatog - na kraju je svaki imao 80 kuna. Korak po korak ćemo "prebacivati" sličice, dok ne dođemo do početnog stanja.

Biste li znali reći napamet tko je na početku imao najviše sličica?

- prethodno je Darko dao Ivanu i Anti onoliko koliko su oni već imali. Dakle, broj njihovih sličica bio se udvostručio! A **Darko** je dao sličica koliko su oni ukupno primili.

- korak prije : Ante je napravio isto, dakle, broj Ivanovih i Darkovih sličica se bio udvostručio!
- korak prije: Ivan je "poduplao" broj Antinih i Darkovih sličica

2. Ako broj podijelimo s 20, pa dobivenom količniku pribrojimo 175 i dobiveni zbroj pomnožimo s 4, dobit ćemo 1340. Koji smo broj imali na početku?

Opet krećemo od kraja, od 1340… i otpetljavamo unatrag.

3. Obitelj mjesečno troši za hranu 3/5 ukupne zarade, za stanarinu i komunalne troškove 1/4 ostatka, za struju 1/3 preostalog novca. Kad podmire sve troškove ostane im 384kn. Koliko kuna imaju prihoda?
Rj: 1920 kn

Operacije na skupovima i prirodnim brojevima

USPOREĐIVANJE KOLIČINA i PRIRODNIH BROJEVA:

- prije nego krenemo s operacijama, prisjetimo se kako mogu uspoređivati količine, čak i bez da broje – vađenje simultano predmeta iz košare iz jedne pa iz druge – u kojoj prije ostane 0 (ništa) predmeta, u toj je manje predmeta
- podsjetimo se što je skup i kako ga možemo prikazati
- **Skup** je osnovni mat. pojam koji se ne definira: mnoštvo objekata koje doživljavamo kao cjelinu.
- Skupove inače zapisujemo ili definicijom (matematičkom ili opisnom), nabrajanjem elemenata ili grafičkim prikazom kakvog nazivamo **Vennovim dijagramom.**
  Matematički znamo ovako zapisati: {2,3,5,7,11,13,17,19} ili primjerice {1,2,3,...} ili {...-3,-2,-1,0,1,2,3...}
  Možemo ga definirati i zajedničkim svojstvom – skup studenata 4. god US
- sa skupovima možemo nešto činiti i dobiti novi skup
- Tako možemo definirati sljedeće operacije:
  - **uniju** dva skupa – rezultat je skup u kojem se nalaze SVI elementi iz ova dva skupa
  - **presjek** dva skupa – rezultat je skup u kojem se nalaze ZAJEDNIČKI elementi zadana dva skupa
  - **razliku** dva skupa – rezultat je skup u kojem se nalaze ELEMENTI PRVOG SKUPA KOJI NISU U DRUGOM

ZBRAJANJE:

- sjećate li se „neposrednog sljedbenika”? KLJUČAN JE ZA DEFINICIJU ZBRAJANJA.
- Povezuje stare s novim brojevima npr. 6 je neposredni sljedbenik njegovog neposrednog prethodnika broja 5 i različit je od svih njegovih prethodnika
- NE UVODITI novi broj kao 5+1! - ne uz pomoć zbrajanja
- m + 1 = s (m)
  m + n = ?

- **m + n = s (s (...(s (m)))) ** - n- ti neposredni sljedbenik od m!
  m + n = m, n = 0
  s (m) + n', n = s (n')

OBJAŠNJENJE: pogledamo je li n=0
- lijevo povećam za 1, desnog smanjim za 1 dok ne dođemo do 0
- ako je n= 0 onda je m+n = m

n= s(n') znači: ako je n sljedbenik od nečega, uzmi njegovog neposrednog prethodnika i stvori od njega neposrednog sljedbenika

- 3 + 2 = ? krenemo od 3, dodajemo iz drugog skupa 1 po 1
  3 + 2 = 3 + s(1) = s (3) + 1 = s (s (3)) + 0 = s (s(3))
- odgovara na pitanje **koliko je nečega ukupno?** (u dva ili više skupova)
- smislite nekoliko adekvatnih primjera, što mislite kada djeca mogu zbrajati, odnosno kada im možete objasniti kako zbrajati?
- A + B = C
  A i B nazivamo **pribrojnicima (sumandima)**
  C nazivamo **zbrojem (sumom)**
- operacija zbrajanja ima **neka bitna svojstva:**
- **KOMUTATIVNOST** zbrajanja..... a + b = b + a (prije ćemo računati 20+3 nego 3+20)
  Primjer: napravit ćemo buket tako da ćemo uzeti 5 ruža i 3 gerbera (koliko je ukupno cvjetova unutra?) A ako uzmemo prvo 3 gerbera i onda u buket dodamo 5 ruža?
  Smislite svoje primjere.
- **ASOCIJATIVNOST** zbrajanja..... a + (b + c) = (a + b) + c
  Primjer 1: jednaku količinu (jabuka) dobijemo ako prvo stavimo sadržaje druge i treće košare zajedno, pa to prebacimo u prvu...ili ako prvoj dodamo sadržaj druge, pa tome još dodamo sadržaj treće košare.

  Primjer 2: tri grupe vrtićke djece ide na izlet autobusom. Iz prve grupe na izlet ide 14 djece, iz druge 17, iz treće 21 dijete. Odgajateljice ih uvode u autobus. Koliko djece ukupno moraju prebrojiti u autobusu?
  Svejedno je jesu li prvo uvele i pobrojile djecu prve grupe, njoj pridodale one iz druge, te na kraju na taj rezultat dodale broj djece iz treće grupe ili su pak broju djece iz prve grupe dodale zbroj broja djece druge i treće grupe (koje su istovremeno uvele u autobus)
  Smislite svoje primjere.
- Prije nego nauče zbrajati, a pri upoznavanju brojeva, dobro je vježbati njihove rastave (skupova na disjunktne podskupove), pa kasnije zapisati primjerice:
  7 = 6+1
  5+2
  4+3
  3+4
  2+5
  1+6

7+0
0+7
ali i druge, tipa 3+3+1 ili 1+1+1+1+1+1+1
Korisno je kod oduzimanja kad kasnije treba zbrojiti 8+7

PRIMJENA KOMUTATIVNOSTI I ASOCIJATIVNOSTI

53+19+47= …recimo da bismo elegantno prvo zbrojili 53 i 47…
= (53+19)+47 =(asoc.)
= 53+(19+47) =(kom.)
= 53+(47+19) = (asoc.)
= (53+47)+19 = 100 + 19 = 119

17+24+140+483+36 = recimo da bismo prvo htjeli zbrojiti 24 i 36 te 17 i 483
=(((17+24)+140)483) + 36 = (asoc.)
=((17+24)+140+(483+36) =...
= 87+1234+63+116 =....

ODUZIMANJE:

- odgovara na pitanje **koliko ih je ostalo?** (nakon što su neki otišli, nešto smo pojeli...)
- Primjer:
  1. U košari je bilo 8 jabuka. Dvije smo pojeli, koliko ih je ostalo?
  Ili **koliko nedostaje?**
  2. Koliko moramo dodati ruža, ako već imamo 3, kako bi ih u buketu bilo 5?
  3 + ____ = 5
  ____ = 5 – 3

- A – B = C
  A – umanjenik (minuend)
  B – umanjitelj (suptrahend)
  C – razlika (diferencija)

- mogli bismo ga formalno definirati uz pomoć zbrajanja, ili ovako nekako:
- **m – n** = m, n = 0
  m' – n ', m = s (m'), n = s (n')
- ovako djeca mogu oduzimati – što bi to značilo na skupovima predmeta?
- Mičemo iz dva skupa istovremeno predmete, dok jednog ne ispraznimo... (odgovor na pitanje **koliko je nečega više**?)

VEZA ZBRAJANJA I ODUZIMANJA SA SKUPOVIMA:

- Oduzimanje na skupovima A -B je skup svih elemenata u A koji nisu u B. Ukoliko je B podskup od A, onda je brojnost skupa A – B upravo broj objekata u A manje broj objekata u B.

MNOŽENJE:

- Množenje je pokrata za zbrajanje međusobno jednakih pribrojnika.
- Koliko je jabuka ukupno? 5 košara od po 4 jabuke!
  5 x 4
  Je li to isto što i 4 x 5? Što bi to značilo?
- 5x4 je zaista isto što i 4x5! To svojstvo zove se **KOMUTATIVNOST MNOŽENJA**
- nije očito da vrijedi komutativnost množenja tj. nije uopće očito da je u 5 košara s po 4 jabuke ukupno jednako jabuka koliko u 4 košare po 5 jabuka. No kad se poslože u redove i stupce, gdje se vidi da je zapravo svejedno što su redovi, a što stupci… jasno je da to svojstvo vrijedi uvijek! (slika...)

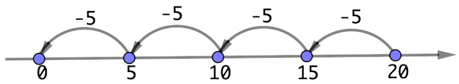
- Imamo 5 košara, u svakoj po 3 crvene i 1 zelenu jabuku. Koliko je ukupno jabuka u košarama? Možemo naravno pomnožiti 5 x (3 +1). A što da smo prvo prebrojili koliko je crvenih, pa zelenih jabuka u košarama, pa onda zbrojili? Koliko je jabuka ukupno?

  5x3 + 5x1 = 5 x (3+1) Ovo svojstvo se zove **DISTRIBUTIVNOST MNOŽENJA PREMA ZBRAJANJU**

  $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
- Svejedno je jesmo li prvo pobrojili koliko je ukupno jabuka u svakoj košari pa pomnožili s brojem košara ili smo broj zelenih u svakoj pomnožili s brojem košara, broj crvenih u svakoj i ta dva broja zbrojili.
- Također, ako radimo 5 buketa, svaki od 3 gerbera i 4 ruže, ukupni broj cvjetova možemo dobiti tako da broj buketa pomnožimo sa zbrojem 3 i 4 (cvjetova u buketu) ili tako da broj buketa zasebno pomnožimo s brojem gerbera, pa s brojem ruža po buketu (pobrojimo prvo koliko je gerbera i koliko je ruža) i to dvoje zbrojimo. Smislite svoj primjer.

DIJELJENJE (gotovo paralelno s množenjem)

- opet krećemo od konkretnih primjera:
  Dvanaest jabuka treba pravedno podijeliti između 4 učenika. Koliko će dobiti svaki?
  🍎 🍎 🍎 🍎 prvo dijeljenje (svakom po jedna)!
  🍎 🍎 🍎 🍎 drugo dijeljenje!
  🍎 🍎 🍎 🍎 treće dijeljenje!
  razdjeljujemo ukupnu količinu na jednakobrojne skupove. Svatko očito dobije 3 jabuke.
- prvo se vježba/usvaja takvo dijeljenje u “kutije” (i uz pitanje koliko je objekata na kraju u kutiji)
- sljedeći korak može biti uzastopno oduzimanje
  Imamo 20 bombona koje trebamo podijeliti između petero djece. Koliko će tko dobiti?
  U prvom krugu damo svakom djetetu po bombon, pa u drugom, pa u trećem...



5 se 4 puta može oduzeti od 20, pa je 20 podijeljeno s (na) 5 jednako 4.

- sjedeći korak je povezivanje s množenjem:
  20 podijeljeno na 5 je 4 jer je 4 puta 5 jednako 20
- uvodimo zapis:

20	:	5	=	4
dividend		**divizor**		**kvocijent**
djeljenik		**djelitelj**		**količnik**

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE, USMENO I PISMENO

- jako bitno je razložiti učenicima algoritme Z i O (zbrajanja i oduzimanja)
- moraju razumjeti postupak
- kasnija faza je automatizacija
- podsjećati ih na smisao
- pretpostavka da razumiju brojeve i odnos

DO 20

- u etapama, prvo 0-5, zatim 0-10, zatim 0-20
- moraju imati vizualnu predodžbu da bi mogli prijeći na matematički zapis

DO 10

- ova faza traje i teška im je
- možemo im pustiti da koriste prstiće

METODIČKI REDOSLIJED!!

1. Z i O 0-5
2. Z i O 0-10
3. Z i O s nulom
4. Z i O 0-20 (zbrajanje 10 i jednoznamenkasti, oduzimanje do 10)
   npr. 10 + 4, 15 – 5
   zatim Z i O unutar druge desetice
   npr 13+4, 14-2

- konkretno hrpica od 10 i još 3, dodamo na hrpicu još 4, ahaaa to je hrpica od 10 i još 7 što je 17
- zbrajamo do 20 i od 20
  npr. 16 + 4, 20 -3

- najsuptilnije Z i O prelazimo 10
  npr. 8 + 7, 14 – 6
- da bismo to uspješno napravili izrazito je bitno na brojevima do 10 raditi rastave
  7 = 6+1
  5+2
  4+3
  3+4
  2+5
  1+6
  7+0
  0+7
- 8 + 7 rastavljamo 7 na 2+5 – želimo doći do 10
  8 + 2 + 5 = 10 + 5 = 15
  znači 8 + 7 = 8 + (2+5) = (8+2) + 5 = 10+5 = 15
- **pokazivati konkretnim, grupirati desetice (odnosno dvije desetice), računati uz brojevnu crtu!**

DO 100

1. dvoznamenkasti +/- jednoznamenkasti
   - zbrajanje desetice i jednoznamenkastog broja (30+4), oduzimanje do desetice (55-5)
   - zbrajanje unutar desetice (43+4), oduzimanje također (54-2)
   - zbrajanje tako da dosegnemo sljedeću deseticu (36+4), oduzimanje do desetice (50-3)
   - najsuptilnije Z i O tako da prelazite deseticu (48+7, 54-6)
   npr. 48 + 7 = 48 + 2 + 5 = 50 + 5 = 55
   - prikazivati kao D i J uz crtanje i prikaz veze desetica i jedinica, računanje uz pomoć brojevne crte
2. dvoznamenkasti +/- dvoznamenkasti
   - zbrajanje i oduzimanje desetica (30+20, 40-20)
   - zbrajanje i oduzimanje dvoznamenkastog broja i desetice (35+20, 35-20)
   - zbrajanje tako da dosegnemo sljedeću deseticu (36+24), oduzimanje od desetice (50-13)

   PAZI: 35 + 20 = 30 + 20 + 5   ali 36 + 24 = 36 + 20 + 4
   - za svaku fazu služimo se prethodnom
   - najsuptilnije: Z i O da prelazimo deseticu (48+27, 54-26)
   - prikazivati kao D i J uz crtanje i prikaz veze D i J
   50 – 13 = 50 - 10 – 3 = 40 – 3 = 37
   54 – 26 = 54 – 20 – 6 = 34 – 6 = 34 – 4 – 2 = 28
   - djeca kreću ubrzavati, prvo se računa duljim, a onda sve kraćim načinom, što vodi prema računanju napamet

DO 1000

1. troznamenkasti +/- jednoznamenkasti (3. razred)

- ponavlja se gradivo 2. razreda

- dolazimo do 325+6, 412-7

2. pismeno zbrajanje, ZATIM oduzimanje

ZBRAJANJE:

- radi se postupno
- prvo primjeri „bez prijelaza” 432+126
- onda s jednim prijelazom posebno na mjestu jedinica 423+518, posebno na mjestu desetica 341+273
- na kraju s dva prijelaza

npr. 432 + 126 = 432+100+20+6 = 400+30+2+100+20+6 ili 4S 3D 2J i 1S 2D 6J =nema prijelaza

432+518 = 400+30+2+500+10+8
= 900+40+**10**
= 900 + **50 + 0**
= 950

MATEMATIČKI ZADATAK – ZADACI ZA DODATNU NASTAVU

Još malo o matematičkom zadatku:

- čine osnovu nastave matematike
- kroz njih se usvaja gradivo, ponavlja, dobiva „osjećaj” za matematičke pojmove, odnose, povezuje se gradivo sa stvarnim životom
- stvaraju se radne navike, marljivost, pedantnost, upornost i koncentracija
- uči se iz netočnih rješenja – nikako ih ne treba brisati!
- Kako ih zadajemo? Ne dvosmisleno, jasno, koncizno, dobro definirano
- moraju biti motivirajući, maštoviti, povezani sa stvarnošću
- numerički zadaci rade se najviše, njih precizno postupno koristimo, od jednostavnijih k složenijima
- zadaci riječima: moramo ih znati čitati – i to treba učiti
- moramo ih znati interpretirati – izvaditi podatke, razumjeti što se traži...

GEORGE POLYA – KAKO ĆU RIJEŠITI MATEMATIČKI ZADATAK?

- George Polya, američki matematičar mađarskog podrijetla, bio je možda najznamenitiji metodičar matematike, a pritom i vrhunski matematičar (ili, u prvom redu uspješni matematičar, a onda i jednako dobar metodičar). Polovicom prošloga stoljeća bilo je uobičajeno da se temama metodike matematike bave vrhunski znanstvenici.
- između ostalog, navodi kako je bitan pristup zadatku uroniti ga u realni kontekst, zapisati samostalno podatke, navesti što se traži, razmisliti o mogućim strategijama pronalaska rješenja

- izrazito bitna je diskusija nakon rješavanja! Je li dobiveno rješenje zaista rješenje, ima li drugih rješenja – ako da, koja su, ima li drugih načina dolaska do rješenja – ako da, koji su
- u knjizi *Kako ću riješiti matematički zadatak* (*How to solve it*, 1945.) razrađuje pristup rješavanju matematičkog zadatka.
  Opisuje 4 koraka:
  - razumijevanje problema
  - planiranje, odnosno smišljanje strategija rješavanja
  - primjena strategije
  - pogled unazad: što smo dobili, je li moglo više, drugačije?

- Pritom daje generalni okvir kojim bi se trebalo ravnati u svim uzrastima odnosno stupnjevima obrazovanja, pa čak i matematički profesionalci (stoga su primjeri u pravilu odabrani iz matematike viših razreda)
- to što ne postoji recept za rješavanje zadatka iz matematike upravo daje draž matematici
- potrebno je kombinirati rutinu te zadatke koje se rješavaju poznatom strategijom i drugačije zadatke koji zahtijevaju originalni pristup

NATJECANJE ZA MALENE:
- natjecanja, a i zanimljivih izvora zadataka je dosta. Izdvajam najdraže:
- „Ekipa za 5+" (MD Istra) – ekipno natjecanje, PIKO za 3. i 4. razred (za veće MEGA, GIGA, TERA)
- „Klokan bez granica" - za sve uzraste, internacionalni, bez selekcije, eliminacije ili finala – postoje zadaci za uzraste (Leptirići 3. razred, Ecolier 4. i 5. razred...) ali se zadaci ponavljaju, što znači da „mjere" napredak i da su zadaci nevezani za gradivo!

MNOŽENJE I DIJELJENJE

MNOŽENJE (2. razred – do 100)
- zbrajanje međusobno jednakih pribrojnika
- krećemo od konkretnih primjera i veze sa zbrajanjem
  Imamo 8 redova klupa u kojima sjede po četiri učenika. Koliko je učenika u klupama?
  Na skladištu je 7 paketa tetrapaka, gdje je u svakom paketu po 6 litara mlijeka.
  Koliko je ukupno litara mlijeka na skladištu?
- radimo puno takvih jednostavnih tekstualnih zadataka
- u početku crtamo i zbrajamo - napamet, na prste, na brojevnom pravcu
- tu jako pomažu vježbe brojenja "za tri", "za pet" itd.
- vodimo terminologiju: 8 puta (po) 4, 7 puta (po) 6.... Znamo točno što to znači, upravo prema standardnom značenju u jeziku.

- uvodimo zapis
  $m \cdot n = 0, \qquad m = 0$
  $m' \cdot n + n, m = s(m')$
  $5 \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 3 = (3 \cdot 3 + 3) + 3 = ((2 \cdot 3 + 3) + 3) + 3 = \ldots = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
- uvodimo **tablicu množenja** - ubrzavamo proces zbrajanja jednakih pribrojnika!

MNOŽENJE I DIJELJENE BROJEVA DO 100:

- Učenike treba upoznati sa svojstvima **komutativnosti i asocijativnosti množenja, te distributivnosti množenja prema zbrajanju/oduzimanju**
- kako ih objašnjavamo - podsjetite se!
- **komutativnost** množenja $a \cdot b = b \cdot a$
- **asocijativnosti** množenja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- **distributivnosti množenja prema zbrajanju/oduzimanju** $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
- uči se **tablica** tako da se vježba na zadacima riječima i čisto numeričkim zadacima, množenje broja _____ (npr. 3) i dijeljenje brojem ___ (npr. 3)
- obratiti pažnju na smisao: npr. ako je $7 \cdot 6 = 42$, koliko je $9 \cdot 6$?
- prvo dobro obradimo množenje, pa se kod dijeljenja pozivamo na množenje
  $21 : 3 = 7$ jer $7 \cdot 3 = 21$
- uvodimo pojam **djeljivosti** (također, i primjeri tipa kako 28 čokolada podijeliti među 9 djece)
- jako bitno: **redoslijed operacija**

MNOŽENJE BROJEVA DO 1000

- u 2.r. uči se množenje do 100, ali samo tablica množenja (10x10)
- u 3.r. to se proširuje tako da množimo, za početak, dvoznamenkaste brojeve jednoznamenkastima. Metodički redoslijed je: prvo množimo desetice s jednoznamenkastim brojem (30 x 3, što su hrpe od tri desetice što „kopiramo“ tri puta, dakle to je 9 desetica…), zatim općenito a bez prijelaza (32 x 3), zatim prijelaz na jedinici (24 x 3). Činimo to računanjem „na prste“ koje odgovara raspisivanju i korištenju svojstva distributivnosti 32 x 3 = (30 + 2) x 3 = 30 x 3 + 2 x 3 = 90 + 6 = 96, odnosno s prijelazom (20 + 4) x 3 = 60 + 12 = 72
- dalje podučavamo metodu pismenog množenja, s potpisivanjem. Dobro je uvijek se pozivati na prethodno, „usmeno“ ili „mentalno“ množenje.
- dopuniti!!!!

DIJELJENJE BROJEVA DO 1000

PONOVIMO:

- 2.r. dijeljenje se usvaja paralelno s množenjem (a nakon što se množenje jako dobro usvojilo) - tablica!
- također, dijeljenje s ostatkom
- 3.r.
  1. dijeljenje dekadskim jedinicama

30 : 10 = ..., 500 : 100 = ...
120 : 10 = ..., 3500 : 100 = ...

- nakon što smo usvojili množenje dekadskim jedinicama (dodavanje nula) je lako

DIJELJENJE JEDNOZNAMENKASTIM BROJEM (3.razred)

- prvo dijelimo rastavljanjem na zbroj - zbroj višekratnika dekadskih jedinica.. prirodno!
  39 : 3 = (30 + 9) : 3 = ...
  462 : 2 = ...

  78 : 6 = (60 + 18) : 6 = ... ovo se baš i ne radi
  942 : 6 = ...

PISMENO DIJELJENJE (prvo jednoznamenkastim brojem)

- 462 : 2 , u tablicu

- 462 : 2 , u tablicu

S	D	J				S	D	J
4	6	2	:	2	=	2		
-4								

- 462 : 2 , kad uvježbaju, brišemo tablicu

S	D	J				S	D	J
4	6	2	:	2	=	2	3	1
-4								
0	6							
	-6							
		2						
		-2						
		0						

- Možemo dati motivacijsku priču, prikazivati konkretnim, novčanicama...
- Nakon 462 : 2 slijedi dijeljenje tipa
  78 : 6
- zatim dijeljenje s ostatkom
  487 : 4
  942 : 6

PISMENO DIJELJENJE 4. RAZRED:

- ponovi se dijeljenje troznamenkastog broja jednoznamenkastim
- zatim se dijeli s dvoznamenkastim brojem za razliku od prethodnog gdje se koristi znanje **tablice množenja/dijeljenja**, ovdje se mora **efektivno množiti**!

- pronalaženje djelomičnih količnika komplicirano je učenicima. Uključuje: **dijeljenje, množenje, procjenjivanje, oduzimanje**
- Posebno uočite važnost **procjenjivanja.**

PISMENO DIJELJENJE „ŠKOLA NA TREĆEM"

- uz poneke nezgodne jezične formulacije...
- 3.r. dijeljenje troznamenkastog s jednoznamenkastim brojem https://www.youtube.com/watch?v=eu6iepfZJU0&list=PLhE5H-JM9CvHPeVyRaI-ZruLoRyStSbs_&index=21 od oko 31'00''
- 4.r. dijeljenje troznamenkastog dvoznamenkastim brojem https://www.youtube.com/watch?v=Xj6aNa1mE14 (nisam nikako zadovoljna zapisom na kraju, kod provjere, sve u jedan koš – uf...)

VIŠE RAČUNSKIH OPERACIJA

- sa **zagradama** se učenici susreću u 2. razredu osnovne škole, kad koriste izraze s od tri člana i operacije zbrajanja i oduzimanja
- **redoslijed izvođenja računskih radnji** po NPiP radio se "zaozbiljno" tek na kraju 4. razreda, dok se po novom Kurikulumu radi u 3. razredu
- do tog trenutka rade se zadaci riječima kod kojih se izrazi kojima se dobije rješenje mogu napisati odjednom, uz pomoć zagrada (pa je otprije jasno da računamo prvo ono u zagradama), ili se rješavaju tako da se računa korak po korak i time izbjegava kompleksniji izraz

  Pogledali smo https://www.youtube.com/watch?v=38IzBVVcfhk&list=PLhE5H-JM9CvHPeVyRaI-ZruLoRyStSbs_&index=26 od cca 46: 00
- najava je malo "ukrivo" - u zadacima se ne vježba razumijevanje i primjena hijerarhijskog rasporeda računskih operacija ("Kad u zadatku imamo zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, što ćemo prvo napraviti? Množiti!" :-/)
- "Umnošku brojeva 27 i 3 dodaj broj 98. " Uočite da uopće nije bitna hijerarhija rač. operacija, već eventualno postavljanje zagrada...
- Na isti način bismo rješavali "Zbroj brojeva 27 i 3 pomnoži brojem 98."
- Od broja 913 oduzmi umnožak brojeva 29 i 3." -> isto bi se rješavalo, u smislu redoslijeda računanja, kad bi bilo "Broj 913 pomnoži razlikom brojeva 29 i 3" (presudne su zagrade)
- odabir zadataka je inače zanimljiv, rješenja bi trebala biti bolje prezentirana, objašnjenja bolja, odabir terminologije i izraza nije uvijek sretan

3. travnja https://www.youtube.com/watch?v=WtjiMNbB9zQ&list=PLhE5H-JM9CvHPeVyRaI-ZruLoRyStSbs_&index=32 oko 28:40

- zadaci su zanimljivi, slični onima iz filma od 1.travnja
- "Broju 24 dodajte umnožak brojeva 8 i 5, zatim oduzmite 13."
- "Razliku brojeva 74 i 68 pomnožite brojem 10."

- u oba slučaja iz teksta zadataka moramo zaključiti što prvo računamo, i tu stavljamo zagrade! (i u prvom zadatku smo mogli, samo zbog množenja ne trebamo, ali bolje bi bilo da da)

3. razred 6. travnja https://www.youtube.com/watch?v=ceNK_epMc2I&list=PLhE5H-JM9CvHPeVyRaI-ZruLoRyStSbs_&index=31 50:10 (problem i dijeljenje)
3. razred 7. travnja https://www.youtube.com/watch?v=qJvg16HjsNw&list=PLhE5H-JM9CvHPeVyRaI-ZruLoRyStSbs_&index=30 30:50(problem)

- ovdje je dobro što su **izvađeni podaci** (prvi zadatak)
- je li se zadatak mogao drugačije riješiti? zašto ovako rješavamo, zašto bi ovako bilo bolje?
- kod drugog zadatka se (opet, nažalost) podaci ne zapisuju prije rješavanja malo nedostaje prirodnost u rješavanju (zašto rastavljamo 65 na zbroj...)

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE uz pomoć didaktičnih pomagala:

- cilj je dobiti nove uvide u satove aritmetike na kojima se radi zbrajanje i oduzimanje, promišljati o odabiru zadataka i strategijama za približavanje sadržaja
- upoznat ćemo neka od didaktičkih pomagala koja se koriste u navedenoj nastavi
- osmislit ćemo zadatke za jedan takav sat

STERN BLOKOVI:

- Catherine Stern 1949.
- u osnovi blokovi odgovarajućih duljina i boja, gdje se vidi osnovna kockica (pa se brojenjem kockica dobije broj kojemu je blok pridružen)

- za što biste ih mogli koristiti? U kojem razredu?
  1. razred učenje brojeva do 10 i do 20, uspoređivanje brojeva, zbrajanje i oduzimanje do 20 (kako?)
  2. razred zbrajanje i oduzimanje do 100
  4. razred obujam, površine (možemo li i ranije?)

- različite su izvedbe – negdje s umetanjem, tako da je izrazito pogodan za usvajanje brojeva/veličina i njihovo uspoređivanje za djecu s problemima tipa disleksije.

Dodatno je pogodan za uočavanje koji su brojevi parni, koji neparni (i rastavljanje količina u grupe od dva)

- ima još mnogo mogućih varijanti. Ova je dobra za uočavanje hijerarhijskog rasporeda brojeva do 10
- postoji i varijanta nalik na Dienesove blokove

CUISENAIROVI ŠTAPIĆI:

- Georges Cuisenaire, popularizirao ih je Caleb Gattegno 1950-ih
- svakom broju 1-10 pridružimo štapić odgovarajuće duljine i određene boje
- gdje ih možemo koristiti?
  - uspoređivanje, zbrajanje i oduzimanje (sastavljanje, rastavljanje i poravnavanje štapića!)
  - svojstva operacije zbrajanja
  - množenje i dijeljenje - traženje djelitelja, rastav na faktore....
  - razlomci, postotci, površine...

DIENESOVI BLOKOVI:

- Zoltán Pál Dienes (60tih godina 20.st.?)
- objekti (složeni od kockica) koji predstavljaju jedinice, desetice, stotice
- gdje ih možemo koristiti?
  - njima možemo predočiti praktički svu aritmetiku razredne nastave (ako ovom setu lijevo dodamo još kocku koja predstavlja 1000, do 10 000 računamo bez problema)
  - npr. https://www.youtube.com/watch?v=EIrA7BM4q6M
  - površine, volumeni, prikaz i analiza podataka, razlomci, postoci...

ABAKUS:

- Kad govorimo o pomagalima u računanju /računalima, ne smijemo zaboraviti na abakus, uz prste među najstarijim računalima (u varijanti s kamenčićima i prilagođen heksagezimalnom sustavu javlja se još kod Sumerana, no možda je i stariji?)
- kako bismo baratali abakusom, morali bismo mu posvetiti neko vrijeme - no, neka djeca bi zacijelo bolje računala uz njegovu pomoć, nego školskim načinom! Svakako, djeci s disleksijom je jako pogodan.

Mjerenja

Matematički koncepti/domene

- brojevi
- algebra i funkcije
- oblik i prostor
- mjerenje
- podaci

MJERA I MJERENJE:
Što po vama znači izmjeriti nešto?
- pridružiti numeričku vrijednost objektima ili događajima. Kako? Tako da svim objektima tog tipa možemo pridružiti broj, koji je obavezno nenegativan. Međusobno **uspoređujemo istovrsne objekte pridružujući im brojeve.** Najčešće sve uspoređujemo s objektom jedinične veličine. Također, mora biti jasno koji je smisao veće, a koji manje vrijednosti toga broja...
Gdje primjećujete važnost mjerenja?
- Svugdje! u gradnji, proizvodnji, trgovini, znanosti...
- očito je i razvoj matematike (aritmetike i geometrije) usko vezan uz mjerenja

- **MJERA** je funkcija koja svim podskupovima nekog skupa (objekata) pridružuje broj veći od nula.
  Ta funkcija μ je monotona, što znači da ako je $A \subseteq B$ onda je $\mu(A) \leq \mu(B)$.
  Dapače, ako je $A = A_1 \cup A_2$ tako da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (A je unija disjunktnih skupova), onda $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.
- Također je $\mu(\emptyset) = 0$.
- Odgovara li ovo onome što znate o mjerenjima i mjerama?
- Jedinična mjera - skup E za koji za danu mjeru μ vrijedi $\mu(E) = 1$

Što smo prvo počeli mjeriti?
- vrijeme (2.r.)
- duljine (2.r)
- površine (4.r.)
- masu (3.r)
- vrijednost (2.r. jedinice za novac)
- obujam/volumen (4.r.)

Kako smo mjerili?

- Zbog različitih mjera (odnosno, jediničnih mjera), u 18.st. jača težnja da se mjere standardiziraju
- 1875. Opća konferencija za utege i mjere - **Dogovor o metru**
- iz tog **Metarskog sustava** jedinica razvio se **Međunarodni sustav mj. jed. SI** (1960.)
- 1793. u zenitu francuske revolucije, fr. akademija definira metar (mètre): desetmilijunti dio udaljenosti ekvatora od sjevernog pola (na razini mora)
- u zenitu francuske revolucije, fr. akademija definira metar (mètre): desetmilijunti dio udaljenosti ekvatora od sjevernog pola (na razini mora)
  - tadašnje mjerenje nije se pokazalo preciznim

- prethodno su postojali drugi pokušaji da se metar poveže s nečim fizikalni
- 1983. udaljenost koju prijeđe svjetlost u vakumu u 1/299 792 458 sekundi

deci centi mili mikro nano piko femto	deka hekto kilo mega giga tera

DULJINA:

- što znači izmjeriti duljinu (dužine, crte, ruba)?
  -> usporediti je s **jediničnom dužinom (tj. njenom duljinom**) prenošenjem iste...
- Tradicionalno se mjerilo dijelovima tijela (vrlo praktično). Što je nedostatak?
  Čime još djeca mogu mjeriti duljinu? Također, sjetite se igara u kojima se ona mjeri.

OPSEG:

- ukupna duljina ruba lika!

POVRŠINA:

- Što znači izračunati/izmjeriti površinu plohe?
  -> pridružiti numeričku vrijednost koja će opisati veličinu plohe razvijene u ravnini.
- Drugim riječima, to nam daje informaciju o tome koliko nam treba pločica, parketa, boje, tapeta... kojima bismo prekrili tu plohu.
- Upravo je ta ideja popločavanja ključna. Kako ćemo popločavati?
  -> tako da odaberemo "jediničnu pločicu"! Po kojem kriteriju?
  -> tako da pločice lijepo naliježu jedna na drugu!
- Jedna (očita) ideja: jedinični kvadrat
- onda ćemo likove smještati u kvadratnu mrežu i računati njihove površine uz pomoć jediničnih površina - naprosto brojeći cijele kvadratiće, odnosno približno brojeći "falične" kvadratiće. Popločavati možemo i drugim oblicima, ali kvadrat je najzgodniji!

MASA:

- najbolje je uspoređivanje uz pomoć ravnotežne vage
- direktno, ili s jediničnim masama – primjerice, kuglicama od gline precizno odmjerenim...

OBUJAM:

- Prije se zasebno (u 3.r.) radio obujam tekućine, zatim u 4. r. obujam tijela

- kod mjerenja obujma tekućine - raznim jediničnim čašicama prelijevanjem mjeriti količinu tekućine u drugim posudama!
- od mjerenja volumena tijela i prije uvođenja standardnih mjernih uvodimo jediničnu kocku, te njome pokušavamo ispuniti prostor čiju zapreminu računamo

Analiza udžbenika

Udžbenike bismo trebali analizirati kritički, na način da što više uočite prednosti i nedostatke u prezentaciji gradiva, razumljivosti učeniku, pomoći nastavniku i roditelju. Bi li učenik samostalno razumio određeno gradivo na osnovu sadržaja u udžbeniku? Je li udžbenik učeniku pristupačan, u smislu da će ga lako koristiti i stvoriti prijateljski, prisan odnos s njime? Jesu li primjeri i zadaci dobro odabrani, u smislu primjerenosti i postupnosti? Je li tekst razumljiv, objašnjenja jasna, je li jasno što se traži u zadacima (ili se implicitno traži nešto poželjno)? Jesu li svi primjeri dobro odabrani? Ima li dvosmislenih primjera koji vode na šablonu u rješavanju ili krive generalizacije? Obiluje li udžbenik dovoljnim brojem primjera i zadataka? Osvrnite se i na vizualna rješenja te količinu i odabir teksta u opisima, s napomenom da je to manje bitno prilikom vrednovanja udžbenika. Također, teško je ocijeniti bez prakse što je odgovarajuća količina primjera i zadataka, veća količina nije nužno bolja (nekad je jednostavnost prednost - stariji udžbenici bili su "skromniji" i jednostavniji, ali moguće bolje pogađali cilj).

Najljepša zahvala Nikol Marelja-Bošnjak i Lauri Maričić na prikupljanju i obradi mojih materijala!!